



Universidad Católica de Temuco
Dirección de Postgrado
Facultad de Educación
Magíster en Gestión Escolar

**Gestión Curricular sobre la Enseñanza - Aprendizaje de los Números
Complejos en NM-3.**

Tesis presentada para optar al grado
de Magíster en Gestión Escolar.

Eduardo Enrique Morales Sanhueza

Temuco – 2014

ÍNDICE

Introducción	4
PARTE I: MARCO TEÓRICO	9
1. La Didáctica de la Matemática como Disciplina Científica.....	9
2. Principales Perspectivas y Líneas de Investigación en Didáctica de la Matemática.....	12
2.1 Teoría y Filosofía de la Educación Matemática.....	12
2.2 La Psicología de la Educación Matemática.....	15
2.3 Resolución de Problemas y Modelización.....	19
2.4 Visiones Socio-Culturales.....	21
2.5 El punto de vista Socio Crítico y la Investigación Acción.....	23
2.6 Perspectivas Semióticas en Educación Matemática.....	25
2.7 Didáctica Fundamental de la Matemática.....	26
2.8 La Fenomenología Didáctica de Freudenthal.....	30
3. Fundamentos de la Enseñanza y el Aprendizaje de la Matemática.....	34
4. Resumen y Conclusión de Didáctica de la Matemática.....	36
5. El Sistema Educativo Chileno.....	43
5.1 Antecedentes.....	43
5.2 El Currículum.....	48
5.3 Gestión Curricular.....	51
5.4 Resumen y Conclusiones Sistema Educativo.....	55
6. Antecedentes Empíricos.....	58
7. Resumen y Conclusiones de la Parte I: MARCO TEORICO	60
PARTE II: MARCO METODOLÓGICO	66
8. Objetivos de Investigación	66
8.1 Objetivo General	66
8.2 Objetivos Especificos.....	66
8.3 Supuesto de Investigación.....	67
9. Metodología.....	67
9.1 Investigación de Diseño	67
9.2 Características de la investigación basada en diseño	69
9.3 Evaluación de los estudios de diseños.....	70

10. Instrumentos y procedimientos de recolección de datos.	72
10.1 Participantes	73
10.2 Implementación.....	74
PARTE III: RESULTADOS Y CONCLUSIONES.....	78
11. Resultados	78
11.1 Resultados Cuantitativos.....	78
11.2 Resultados Cualitativos.....	81
12. Conclusiones	85
13. Recomendaciones	88
14. Limitaciones de la Investigación.....	89
15. Aportes de la investigación	90
16. Referencias	92
17. Anexos.....	98
Anexo A: Planificación de la Unidad Didáctica Números Complejos.....	99
Anexo B: Prueba Selección múltiple Números Complejos.....	106
Anexo C: Carta Gantt “Proyecto Aplicado a la Gestión Escolar”.....	116
Anexo D: Rúbrica para describir el desempeño de los estudiantes.....	118

ÍNDICE DE FIGURAS

FIG. 1. MODELO TETRAÉDRICO DE HIGGINSON PARA LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA	11
FIG. 2. EVOLUCIÓN DEL PROMEDIO NACIONAL DE PUNTAJES SIMCE 4° (2002 - 2009), 8°(1997 – 2009) 10° GRADO (1998 - 2008).....	53
FIG. 3. PREFERENCIAS METODOLÓGICAS.	83
FIG. 4. ACTITUD HACIA LA MATEMÁTICA.....	84

ÍNDICE DE TABLAS

TABLA 1. DESEMPEÑO DE LOS ESTUDIANTES SEGÚN CONTENIDOS.	79
TABLA 2. DISTRIBUCIÓN DE LOS ESTUDIANTES, SEGÚN NOTAS Y PORCENTAJE DE LOGRO.	80

Introducción

El aprendizaje de la matemática ayuda a comprender la realidad y proporciona herramientas para desenvolverse en la vida cotidiana. Entre ellas se encuentra el cálculo, el análisis de la información proveniente de diversas fuentes, la capacidad de generalizar situaciones, formular conjeturas, evaluar la validez de resultados y seleccionar estrategias para resolver problemas. Todo esto contribuye a desarrollar un pensamiento lógico, ordenado, crítico y autónomo, y a generar actitudes como precisión, rigurosidad, perseverancia y confianza en sí mismo, que se valoran no solo en la ciencia y la tecnología, sino también en la vida cotidiana (Ministerio de Educación de Chile, en adelante MINEDUC, 2011).

La presente investigación, recoge lo mencionado en el párrafo anterior desde dos puntos de vista. Por una parte, el quehacer de un docente de enseñanza media de matemática, que planifica la unidad didáctica de números complejos, pensando en un diseño que permita a los estudiantes desarrollar estrategias y construir sus propias herramientas para desenvolverse en la vida diaria y ser capaces de formular conjeturas y resolver problemas propios de la disciplina y de áreas afines como; electrónica, telecomunicaciones e ingeniería en general. Por otra, la perspectiva desde la institucionalización de prácticas curriculares por medio de la gestión curricular.

La complejidad de la tarea de enseñar, es decir, cómo enseñar determinados contenidos y saber cómo aprenden los estudiantes, asume un perfil técnico, científico y

didáctico tanto por parte del profesorado como de quién lidera los procesos curriculares al interior de los establecimientos educativos.

En el profesor y en el proceso de gestión del currículum por tanto, recae la responsabilidad de desarrollar habilidades y estrategias pedagógicas que permitan favorecer el aprendizaje de sus estudiantes, aplicar y modificar los planteamientos y materia curriculares, crear situaciones de enseñanza efectivas y afectivas, analizar y diseñar nuevas prácticas y tareas contextualizadas y situadas, razonar y pensar la educación para el cambio educativo desde un papel individual y colectivo.

En palabras de Bolívar (1999) sería que los cambios pueden, sin duda, ser prescritos y legislados, pero sólo cuando implican a los centros y profesores afectarán el punto clave; lo que los alumnos aprenden y como los profesores enseñan. Es decir, desde la política educativa se pueden implantar cambios pero estos, no llegarán a formar parte viva de los centros y a promover una mejora, si no sitúan al profesorado en un papel de agente de desarrollo curricular, y provocan un desarrollo organizativo interno de los centros escolares.

Los cambios educativos, que quieran tener incidencia real en la vida del centro, tendrán que generarse desde dentro y capacitar al centro para desarrollar su propia cultura innovadora, incidiendo en la estructura organizativa y laboral, al rediseñar los contextos laborales y papeles, potenciar la toma de decisiones y el desarrollo institucional u organizativo, con el objetivo de implicar al profesorado en un análisis reflexivo de su quehacer pedagógico (Bolívar, 1999).

La propuesta didáctica que se presenta, pretende indagar en el proceso de enseñanza-aprendizaje y se trata de estudiar qué ocurre y como se valora el trabajo individual, entendido como la actividad mental o los procesos de pensamiento que desarrollan los estudiantes cuando llevan a cabo la actividad resolutoria. En segundo lugar, el trabajo colaborativo el cual se entenderá como la interacción y cooperación social, de ciertos conocimientos, habilidades y actitudes, que permiten a los estudiantes alcanzar un cometido determinado (Brent, 2007). Luego, el uso de Tecnologías de Información y Comunicación en adelante TIC, ilustrado como el uso de computador, procesadores, hojas de cálculos, applets, entre otros, para favorecer la asimilación de la nueva información, favoreciendo el desarrollo de la ciencia y la tecnología. Y por último, la gestión escolar entendida como el saber gestionar una situación profesional compleja, sabiendo actuar y reaccionar con pertinencia, combinar los recursos y movilizarlos en un contexto educativo, pues las escuelas necesitan aprender a crecer, desarrollarse y hacer frente a retos y demandas, de modo que las organizaciones con futuro serán aquellas que tengan capacidad para aprender (Bolívar, 2013).

De una manera más concreta se tiene que el supuesto de la presente investigación, es que *utilizando diversas estrategias didácticas, se facilita el proceso de enseñanza-aprendizaje de los números complejos*. Para ello se llevó a cabo una investigación basada en diseño, que busca producir conocimiento que ayude a guiar la práctica educativa en el aula y a identificar las estrategias que facilitan el aprendizaje de los números complejos. De manera particular, el estudio persigue fijar precedentes para futuras investigaciones en el área de la gestión curricular y la didáctica de la matemática.

Existen pocos estudios que analicen la enseñanza y el aprendizaje de los números complejos, se revisaron al menos 20 investigaciones europeas y latinoamericanas. Destacándose a nivel internacional, los estudios que indagan “la construcción del significado de número complejo” (Martinez, 2009), “Errores asociados a la representación geométrica –vectorial de números complejos” (Distefano et al, 2012) y un “estudio comparativo de la enseñanza y el aprendizaje de los números complejos entre España y Rumania” (Bhulea, 2007). En cambio a nivel nacional, no fue posible acceder a alguna investigación sobre números complejos, pese a la exhaustiva revisión bibliográfica desarrollada en el transcurso de un año¹. Las razones de no existencia de investigaciones al respecto pueden ser variadas, pero la que cobra mayor sentido es que recién, el ajuste curricular del año 2009 incorpora este contenido, a los programas de estudios de la educación media.

En último lugar, es imprescindible mencionar que el conocimiento matemático y la capacidad para usarlo provocan importantes consecuencias en el desarrollo, el desempeño y la vida de las personas. El entorno social valora el conocimiento matemático y lo asocia a logros, beneficios y capacidades de orden superior. Aprender matemática influye en el concepto que niños, jóvenes y adultos construyen sobre sí mismos y sus capacidades; por tanto, contribuye a que la persona se sienta un ser autónomo y valioso. En consecuencia, la calidad, la pertinencia y la amplitud de ese conocimiento tensiona, las posibilidades y la

¹ Se revisaron las publicaciones electrónicas de Scientific Electronic Library Online, de los últimos cinco años y además las actas de los congresos de la Sociedad Chilena de Educación Matemática (SOCHIEM) y la Sociedad de Matemática de Chile (SOMACHI).

calidad de vida de las personas y afecta el potencial de desarrollo del país (MINEDUC, 2009).

En cuanto a la estructura del texto, se ordena en dos partes. La primera que considera una introducción, marco teórico de didáctica de la matemática y gestión curricular y antecedentes empíricos. En la segunda parte se encuentra la metodología, los objetivos, instrumentos y procedimientos de recolección de datos y en la tercera parte los resultados, conclusiones, recomendaciones, limitaciones, aportes de la investigación y finalmente bibliografía y anexos.

PARTE I: MARCO TEÓRICO

1. La Didáctica de la Matemática como Disciplina Científica.

Interesa en primer lugar, realizar una clarificación terminológica. El término educación es más amplio que didáctica, por lo que se puede distinguir entre Educación Matemática y Didáctica de la Matemática. Esta es la opción tomada por Rico, Sierra y Castro (2000) quienes consideran, la educación matemática como todo el sistema de conocimientos, instituciones, planes de formación y finalidades formativas que conforman una actividad social compleja y diversificada relativa a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Ya lo mencionaba Steiner² (1985), para quien la Educación Matemática admite, además, una interpretación global dialéctica como disciplina científica y como sistema social interactivo que comprende teoría, desarrollo y práctica.

La didáctica de la matemática la describen estos autores como la disciplina que estudia e investiga los problemas que surgen en educación matemática y propone actuaciones fundadas para su transformación. Sin embargo, en el mundo anglosajón se emplea la expresión *Mathematics Education* para referirse al área de conocimiento que en Francia, Alemania, España, se denomina Didáctica de la Matemática. En este trabajo se considerará ambas denominaciones como sinónimas.

Existen teorías generales del aprendizaje y teorías de la enseñanza. Pero, cabe preguntarse ¿aprendizaje de qué?, ¿enseñanza de qué? Los fenómenos del aprendizaje y de

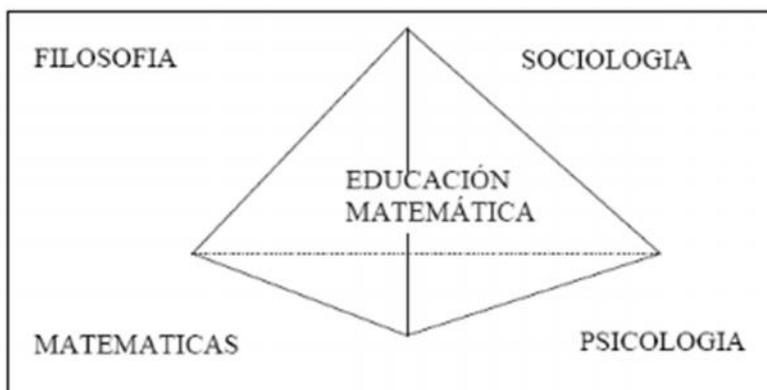
² Uno de los pioneros en la investigación y desarrollo de la educación Matemática.

la enseñanza se refieren a conocimientos particulares y posiblemente la explicación y predicción de estos fenómenos depende de la especificidad de los conocimientos enseñados, además de factores psicopedagógicos, sociales y culturales. Esto es, los factores "saber a aprender" y "saber a enseñar" pueden implicar interacciones con los restantes, que obligue a cambiar sustancialmente la explicación de los fenómenos didácticos, la programación de la enseñanza, el desarrollo del currículo, la práctica de la Educación Matemática, precisa tener en cuenta esta especificidad.

La insuficiencia de las teorías didácticas generales; para explicar la enseñanza de la disciplina, lleva necesariamente a la superación de las mismas mediante la formulación de otras nuevas, más ajustadas a los fenómenos que se tratan de explicar y predecir. Incluso pueden surgir nuevos planteamientos, nuevas formulaciones más audaces que pueden revolucionar, por qué no, los cimientos de teorías establecidas.

Para comprender y/o explicar más claramente Higginson (1980), propone un modelo que relaciona la Educación Matemática con otras disciplinas, considerando a la matemática, psicología, sociología y filosofía como las cuatro disciplinas fundacionales de ésta (Ver figura N°1). El autor considera que la Educación Matemática como la interacción, entre los distintos elementos del tetraedro cuyas caras son dichas disciplinas.

Fig. 1. Modelo Tetraédrico de Higginson para la Educación Matemática



Fuente: Godino, 2011.

Estas distintas dimensiones de la educación matemática asumen, según Godino (2011) las preguntas básicas que se plantean en este campo; qué enseñar (Matemática), por qué (Filosofía), a quién y dónde (Sociología), y cómo (Psicología). En el trabajo anteriormente citado Higginson, se describen las aplicaciones del modelo para clarificar aspectos fundamentales como:

- La comprensión de posturas tradicionales sobre la enseñanza-aprendizaje de la matemática.
- La comprensión de las causas que han producido los cambios curriculares en el pasado y la previsión de cambios futuros.
- El cambio de concepciones sobre la investigación y sobre la preparación de profesores.

Aunque existen otras aplicaciones del modelo tetraédrico, se han seleccionado éstas, por la relevancia y su gran aporte a la didáctica y la gestión curricular, pilares fundamentales del presente estudio.

2. Principales Perspectivas y Líneas de Investigación en Didáctica de la Matemática.

En este apartado se describirá el estado del arte sobre esta problemática, centrándonos en la actividad desarrollada por los grandes núcleos de investigadores, en particular los grupos Theory of Mathematics Education (TME) y Psychology of Mathematics Education (PME). También se sintetizan algunas características básicas de las perspectivas o líneas sobre, resolución de problemas y modelización, visiones socioculturales, la escuela francesa de didáctica de las matemáticas, el interaccionismo simbólico, el punto de vista socio crítico y la fenomenología didáctica de Hans Freudenthal.

2.1 Teoría y Filosofía de la Educación Matemática.

Como afirma Lester (2010), la investigación en educación matemática realizada hasta los años 90, se caracterizaba al menos en Estados Unidos, por ser en gran medida atórica, esto es, con escasas referencias a los fundamentos teóricos en que se basaba, y sin pretensiones de progresar en la construcción de modelos teóricos. Esta circunstancia ha cambiado en los últimos 20 años, como se puede comprobar en los artículos publicados en las principales revistas, donde la referencia al marco teórico en que se apoyan los estudios es un requisito para su publicación.

El interés por los fundamentos teóricos y filosóficos de la educación matemática se ha fortalecido a partir de 2005 al celebrarse un foro de investigación dedicado al tema en la Reunión Anual del Grupo PME, celebrado en la ciudad de Melbourne. En los cinco años posteriores distintos investigadores han venido publicando diversos trabajos en la revista *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM)* y el tema ha sido objeto de interés en uno de los grupos de trabajo del Congreso Europeo de Investigación en Educación Matemática (CERME).

En los “handbooks³” de investigación en educación matemática encontramos trabajos que muestran un reconocimiento creciente del interés en la teoría de la educación matemática. Por ejemplo, Silver y Herbst , (2007) citado en Godino (2011), sintetizan el estado de la “Teoría en la investigación en educación matemática” en “Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning⁴” (Lester, 2007), mientras que Coob (2007) aborda en dicho manual el tema “Putting Philosophy to Work: Coping with Multiple Theoretical Perspectives”. Así mismo, un componente central en la primera y segunda edición del “Handbook of International Research in Mathematics Education”(English, 2002; 2008) fue un avance en el desarrollo de teoría. Los resultados de todos estos esfuerzos se han concretado en la publicación en 2010 de un libro con el título, “Theories of Mathematics Education. Seeking New Frontiers”, editado por B. Sriramn y L. English (Springer, 2010).

- Perspectivas de teorías y filosofías de la educación matemática (B. Sriraman y L. English).

³ Entiéndase manuales y/o literatura fundamental

⁴ Segundo manual de la investigación sobre la enseñanza y aprendizaje de la matemática.

- Reflexiones sobre las teorías del aprendizaje (P. Ernest).
- Fundamentos teóricos, conceptuales y filosóficos de la investigación en educación matemática (F. K. Lester).
- Teorías de la educación matemática: ¿Es un problema la pluralidad? (S. Lerman).
- Reconceptualización de la educación matemática como una ciencia de diseño (R. Lesh y B. Sriraman).
- El ciclo fundamental de la construcción de conceptos subyacente en varios marcos teóricos (J. Pegg y D. Tall).
- Símbolos y mediación en educación matemática (L. Moreno y B. Sriraman).

La necesidad de construir teorías es evidente, ya que constituyen una guía para el planteamiento de problemas de investigación y para interpretar los resultados de las mismas. Un marco teórico permite sistematizar los conocimientos dentro de una disciplina, lo que constituye un primer paso para conseguir una visión clara de la unidad que pueda existir en nuestras percepciones. La teorización es un requisito para que un área de conocimiento alcance la categoría de científica y pueda desempeñar su papel explicativo y predictivo de fenómenos; puede decirse que la investigación científica significativa está siempre guiada por una teoría, aunque a veces lo sea de modo implícito.

Como afirma Mosterín (1987), en su libro *Conceptos y Teorías en la Ciencia*,

“gracias a las teorías introducimos orden conceptual en el caos de un mundo confuso e informe, reducimos el cambio a fórmula, suministramos a la historia (que sin teoría correría el riesgo de perderse en la maraña de los datos) instrumentos de extrapolación y explicación y, en definitiva, entendemos y dominamos el mundo

aunque sea con un entendimiento y un dominio siempre inseguros y problemáticos”(p. 146).

Este mismo autor nos proporciona una metáfora, que nos ayuda a no atribuir a las teorías una verdadera realidad independiente de nosotros mismos: “Somos como arañas, y las teorías son como las redes o telas de araña con que tratamos de captar y capturar el mundo. No hay que confundir estas redes o telas de araña con el mundo real, pero, sin ellas ¡cuánto más alejados estaríamos de poder captarlo y en último término, gozarlo”¡ (p.146).

2.2 La Psicología de la Educación Matemática.

La psicología de la educación es la rama de la psicología y de la pedagogía que estudia científicamente los procesos de enseñanza y aprendizaje, así como de los problemas que en el contexto de los mismos puedan presentarse. Como afirma Gimeno Sacristán (1986) en Godino (2010), son numerosas las posturas que consideran que la enseñanza es una técnica directamente derivada de una teoría psicológica del aprendizaje que le sirve de fundamento. "Esta situación de dependencia es claramente perjudicial para perfilar un campo teórico propio tanto para la Didáctica General como para las Didácticas Especiales, ya que las sitúa en un estado de colonización esterilizante en cuanto a la propia creación teórica" (Sacristán, 1986, p. 18).

La psicología de la educación "amenaza", pues, con acaparar el estudio de la conducta humana en las situaciones de enseñanza, reduciendo al máximo el ámbito de la Didáctica. Dentro de ella, una rama es la psicología de la instrucción, definida por Genovard y Gotzens (1990, p. 33) citado en Godino (2010) como la disciplina científica y

aplicada desarrollada a partir de la psicología de la educación, que estudia las variables psicológicas y su interacción con los componentes de los procesos de enseñanza - aprendizaje que imparten unos sujetos específicos que pretenden enseñar unos contenidos o destrezas concretas a otros individuos igualmente específicos y en un contexto determinado.

Estos autores analizan y clasifican diferentes teorías y modelos instruccionales desde una perspectiva interaccionista en tres tipos: interacción cognitiva, social y contextual. La interacción cognitiva, en la que sitúan las teorías de Piaget, Bruner y Ausubel, designa las teorías instruccionales que subrayan el hecho de que la instrucción es básicamente un intercambio de información, en su acepción más amplia, que se produce entre profesores y alumnos y que debe ejercerse en condiciones lo más óptimas posibles para que el objetivo principal, que el alumno consiga una asimilación de la información correcta, se realice. También se incluyen dentro del significado de este término las propuestas que destacan la interacción entre los contenidos instruccionales y los procesos y habilidades cognitivas del alumno y cuyo fin coincide igualmente con el que se acaba de citar. La perspectiva de interacción social, que da prioridad al papel de los sujetos que intervienen en la instrucción como facilitadores de los aprendizajes que deben desarrollarse tiene como representantes a Vygotsky y Bandura. Por último, Skinner, Gagné y Cronbach, entre otros, han propugnado teorías que pueden encuadrarse en la interacción contextual por la cual la instrucción es ante todo el producto de la interacción entre los sujetos y algunas de las variables del contexto (Godino, 2010).

2.2.1 Aprendizaje matemático y constructivismo.

Dentro del enfoque psicológico, un problema esencial es la identificación de teorías acerca del aprendizaje matemático que aporten un fundamento sobre la enseñanza. Es así como Romberg y Carpenter (1986) afirman que la investigación sobre aprendizaje proporciona relativamente poca luz sobre muchos de los problemas centrales de la instrucción y que gran cantidad de la investigación sobre enseñanza asume presupuestos implícitos sobre el aprendizaje infantil que no son consistentes con las actuales teorías cognitivas del aprendizaje. Se han tratado de aplicar teorías generales (fundamentales) sobre el aprendizaje para deducir principios que guíen la instrucción.

La instrucción basada en principios conductistas tiende a fragmentar el currículum en un número de partes aisladas que podrían aprenderse a través de un refuerzo apropiado, pero la instrucción efectiva de las matemáticas necesita sustentarse en la comprensión de los conceptos matemáticos básicos.

En el caso de teorías del aprendizaje derivadas de la epistemología genética de Piaget, si bien la ejecución de tareas piagetianas está correlacionada con logros aritméticos, las operaciones lógicas no han suministrado una ayuda adecuada para explicar la capacidad del niño para aprender los conceptos y destrezas matemáticas más básicas.

De los estudios cognitivos se deduce uno de los supuestos básicos subyacentes de la investigación actual sobre aprendizaje. Consiste en aceptar que el niño construye, de un modo activo, el conocimiento a través de la interacción con el medio y la organización de sus propios constructos mentales. Aunque la instrucción afecta claramente a lo que el niño aprende, no determina tal aprendizaje. El niño no es un receptor pasivo del conocimiento; lo interpreta, lo estructura y lo asimila a la luz de sus propios esquemas mentales.

Como afirma Vergnaud (1990) la mayoría de los psicólogos interesados hoy por la Educación Matemática son en algún sentido constructivistas. Piensan que las competencias y concepciones son construidas por los propios estudiantes. Según Kilpatrick (1987), el punto de vista constructivista implica dos principios, (Rico, 2012):

- I. El conocimiento es construido activamente por el sujeto que conoce, no es recibido pasivamente del entorno.
- II. Llegar a conocer es un proceso adaptativo que organiza el propio mundo experiencial; no se descubre un mundo independiente, preexistente, exterior a la mente del sujeto.

Pero el hecho de que la mayoría de los investigadores no especifiquen suficientemente las condiciones físicas y sociales bajo las cuales tiene lugar el conocimiento abre el camino a una amplia variedad de posiciones epistemológicas.

Desde un constructivismo simple (trivial, para algunos) que solo reconocen el principio (I) mencionado, al constructivismo radical que acepta los dos principios y, por tanto, niega la posibilidad de la mente para reflejar aspectos objetivos de la realidad. También se habla de un constructivismo social, que refuerza el papel fundamental del conflicto cognitivo en la construcción de la objetividad. La solución epistemológica, afirma Vergnaud (1990), es en principio bastante sencilla: La construcción del conocimiento consiste en la construcción progresiva de representaciones mentales, implícitas o explícitas, que son homomórficas a la realidad para algunos aspectos y no lo son para otros.

2.3 Resolución de Problemas y Modelización.

La resolución de problemas, como línea de investigación en educación matemática, ha sido un tema importante en las últimas décadas. El trabajo seminal de Polya (1945) sobre cómo resolver problemas proporcionó el impulso inicial para una gran cantidad de investigaciones que tuvieron lugar en las siguientes décadas, incluyendo cuestiones como la resolución de problemas simulado con ordenadores, la solución experta de problemas, estrategias y heurísticas de resolución de problemas, procesos metacognitivos y planteamiento de problemas. Más recientemente se ha incrementado la atención hacia la modelización matemática en los grados elemental y medio, así como la resolución de problemas interdisciplinarios.

Como afirman English y Sriraman, 2010, citado en Godino, 2010, una proporción considerable de la investigación inicial se ha enfocado principalmente en los problemas de enunciado verbal del tipo usual en los textos y pruebas escolares. Frecuentemente se trata de problemas “rutinarios” que requieren la aplicación de un procedimiento de cálculo estándar, así como problemas “no rutinarios” que implican alcanzar una meta a partir de un punto de partida cuando el camino no es evidente. Este último tipo de problemas son sin duda esenciales en el aprendizaje matemático, pero son también los que presentan mayor dificultad para los estudiantes.

La importancia que se da a la resolución de problemas en los currículos y en la investigación educativa es el resultado de un punto de vista sobre las matemáticas que considera que su esencia es precisamente la resolución de problemas. Muchos autores han ayudado a desarrollar este punto de vista, entre estos autores destaca Polya (1945), para quién la resolución de un problema consiste, a grandes rasgos, en cuatro fases: 1)

Comprender el problema, 2) Concebir un plan, 3) Ejecutar el plan y 4) Examinar la solución obtenida. Cada fase se acompaña de una serie de preguntas cuya intención clara es actuar como guía para la acción.

Los trabajos de Polya, se pueden considerar como un intento de describir la manera de actuar de un resolutor ideal, y son básicamente descriptivas. Los trabajos de Schoenfeld (1985-1992) recomienda que la investigación y la enseñanza de la resolución de problemas debería: a) ayudar a los estudiantes a desarrollar un amplio repertorio de estrategias más específicas de resolución de problemas que se relacionen más estrechamente con clases de problemas específicos; b) favorecer estrategias metacognitivas (auto-regulación y control) de manera que los estudiantes aprendan a usar sus estrategias de resolución de problemas y el conocimiento del contenido; c) desarrollar modos de mejorar las creencias de los estudiantes sobre la naturaleza de las matemáticas, la resolución de problemas y sus propias competencias personales.

English y Sriraman (2010, p. 265) informan de diversas reflexiones y evaluaciones sobre la eficacia de las investigaciones en resolución de problemas concluyendo al respecto su escasa relevancia sobre la práctica escolar: Enseñar a los estudiantes sobre estrategias de resolución de problemas, heurísticas y fases en la resolución, influye poco en la habilidad para resolver problemas generales de matemáticas.

La resolución de problemas es una parte integral de cualquier aprendizaje matemático, por lo que no debería ser considerada como una parte aislada del currículo matemático. La resolución de problemas, y en general la modelización matemática, debe estar articulada dentro del proceso de estudio de los distintos bloques de contenido matemático. Los contextos de los problemas pueden referirse tanto a las experiencias

familiares de los estudiantes así como aplicaciones a otras áreas. Desde este punto de vista, los problemas deberían aparecer primero para la construcción de los objetos matemáticos y después para su aplicación a diferentes contextos. Sin embargo, como afirma Godino (2010) “desafortunadamente, faltan estudios que aborden el desarrollo conceptual basado en resolución de problemas en interacción con el desarrollo de competencias de resolución de problemas”.

2.4 Visiones Socio-Culturales.

Sierpinska y Lerman (1996) incluyen en su revisión de las epistemologías de (y para) la educación matemática, una síntesis de las visiones socio-culturales, aplicadas a nuestro campo de investigación. De acuerdo con estos autores, la etiqueta 'socio-cultural' se usa para denotar epistemologías que ven al individuo como situado dentro de culturas y situaciones sociales de tal modo que no tiene sentido hablar del individuo o de conocimiento a menos que sea visto a través del contexto o de la actividad. Conocimiento, es conocimiento cultural, considerado como socialmente producido, siempre potencialmente cambiante y regulado por valores sociales.

Una característica, de las tendencias cambiantes en la investigación en educación matemática durante los años recientes, ha sido el interés creciente y la focalización sobre el contexto social de la clase de matemáticas. El papel jugado por el contexto social, en el desarrollo de los individuos o de los grupos ha sido teorizado implícita o explícitamente de muchas maneras; lo que caracteriza a los intereses actuales, es un desplazamiento desde la

identificación de factores sociales sobre el dominio de lo afectivo a una preocupación con la parte que el entorno social y cultural juega como un todo en el desarrollo del niño.

Vygotsky y sus seguidores, por el contrario, estuvieron interesados centralmente con el aprendizaje (y la enseñanza). De hecho, Vygotsky no trata con cuestiones sobre la naturaleza de las matemáticas o cualquier otra forma de conocimiento (excepto para la psicología, que intentó redefinir y reestructurar como una ciencia materialista). Vygotsky se interesó por la naturaleza de la conciencia y en particular con su desarrollo. Para él, la comunicación conduce la conciencia y, por tanto, el proceso de aprendizaje era integral para la comunicación. Identificó dos tipos de pensamiento, pensamiento ordinario o espontáneo y pensamiento científico o teórico. Este último, es el que pretende de modo consciente, la enseñanza y aprendizaje mediante la apropiación por el niño del conocimiento cultural. El primero es el que se logra de manera informal, por medio de las interacciones del niño con los compañeros y los adultos.

Vygotsky (1978) identificó una región que llamó 'la zona de desarrollo próximo', que era la diferencia entre lo que un niño podía hacer por sí mismo y lo que podía hacer con la ayuda de un compañero o un adulto experimentado. Este concepto fundamental estableció que todo el aprendizaje tiene lugar con otros, y que el aprendizaje tira de cada persona, de modo que lo que ve hacer a otros hoy, lo hará con ellos mañana y solo después. El aprendizaje conduce al desarrollo, una aproximación que Vygotsky señaló en contraste directo con los escritos de Piaget para quién el desarrollo, en la forma de estadios de desarrollo del niño, conduce el aprendizaje.

El proceso de internalización era otra característica fundamental del pensamiento de Vygotsky. Él describe el proceso de internalización diferenciándolo de la transferencia de

un plano de consciencia externo a otro interno preexistente; es el proceso en el que este plano se forma. Por tanto, hay una unificación de la enseñanza y el aprendizaje en el nivel escolar.

Una característica importante de la aproximación de Vygotsky es el sentido en que el mundo, y los individuos dentro de él, son productos de su tiempo y lugar. En particular, la psicología del individuo, expresada como consciencia, se forma mediante la mediación de herramientas, que son expresiones de la situación social, histórica y cultural. Esto lleva a considerar al sujeto y al objeto junto, superando la dualidad cartesiana. Lo que implica que no hay fundamentos para afirmar que existe un paralelismo entre los obstáculos epistemológicos en matemáticas, y los obstáculos cognitivos en el aprendizaje.

2.5 El punto de vista Socio Crítico y la Investigación Acción.

Como describen Font y Godino (2010), una corriente importante de la investigación en Educación Matemática, es la que considera que la mejora de los procesos de enseñanza y aprendizaje, debe tener por objetivo la emancipación de las personas y la transformación social. Para ello, se deben potenciar estrategias de reflexión sobre la práctica por parte de los propios actores que promuevan el cambio en esta dirección.

Un ejemplo de programa de investigación en Educación Matemática de este tipo es la llamada Educación Matemática Crítica (Skovsmose, 1999). Este enfoque propone una agenda de investigación para el estudio de la relación entre educación matemática y democracia. Los aspectos que preocupan a la teoría crítica son, entre otros:

- 1) Preparar a los estudiantes para ser ciudadanos,

- 2) Introducir las matemáticas como una herramienta para analizar de manera crítica los hechos socialmente relevantes,
- 3) Tener en cuenta los intereses de los estudiantes,
- 4) Considerar los conflictos culturales en los que se desarrolla el proceso de instrucción,
- 5) Contemplar los aspectos anteriores sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas para que el conocimiento matemático se convierta en una herramienta crítica y
- 6) Dar importancia a la comunicación en el aula, entendida como el conjunto de relaciones interpersonales que son la base de la vida democrática.

En la perspectiva socio - crítica el profesor debe modificar su rol, pasando de ser reproductor a constructor de conocimiento. Se sostiene que el profesor puede y debe elaborar teoría desde su práctica. Se considera que los docentes pueden, y deben, dedicarse a elaborar teoría pedagógica a partir de la investigación educativa, eliminando la disociación que tradicionalmente se ha planteado entre teoría y práctica, que deja la primera a los investigadores y la segunda a los profesores cuando se enfrentan a las tareas cotidianas de su labor (Godino, 2010).

El investigador es un sujeto más, comprometido con el cambio. La metodología de investigación suele ser la investigación-acción participativa. La investigación acción es entendida en su aplicación al ámbito escolar, como el estudio de una situación social en la que participan maestros y estudiantes con objeto de mejorar la calidad de la acción, a través de un proceso cíclico en espiral de diagnóstico del problema, planificación, acción, reflexión y evaluación del resultado de la acción (Elliott, 1996).

2.6 Perspectivas Semióticas en Educación Matemática.

Diversas publicaciones recientes están resaltando el papel que la “ciencia de los signos”, la Semiótica, puede jugar para describir y comprender fenómenos relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (Anderson, Sáenz-Ludlow, Zellweger y Cifarelli, 2003; Radford, 2006; Sáenz-Ludlow y Presmeg, 2006; Radford, Schubring y Seeger, 2008). De acuerdo con Radford (2006), las razones del interés suscitado por la semiótica en la educación matemática son diversas. Por un lado, ha habido una toma de conciencia progresiva del hecho de que, dada la generalidad de los objetos matemáticos, la actividad matemática es, esencialmente una actividad simbólica. Por otro lado, el interés que suscitó en los años 1990 la comprensión de la comunicación en la sala de clase puso en evidencia la importancia que tiene, tanto para el investigador como para el maestro, comprender la naturaleza del discurso matemático.

La semiótica, con su arsenal de métodos y conceptos, aparece como teoría apropiada para intentar dar cuenta de la complejidad discursiva. Otra razón parece ser el uso cada vez mayor, de artefactos tecnológicos en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. La semiótica, de nuevo parece ofrecer conceptos, capaces de ayudar al didáctico en su tarea de entender, el papel cognitivo que desempeñan los artefactos. El hecho, de que los artefactos y los signos son portadores de convenciones y formas culturales de significación, hace de la semiótica; un campo muy situado para entender las relaciones entre los signos a través de los cuales piensan los individuos y el contexto cultural.

Ernest (2006) describe los rasgos característicos de la perspectiva semiótica en Educación Matemática resaltando los nuevos insight⁵ que la ciencia de los signos aporta para describir y comprender los procesos de comunicación y de aprendizaje de las matemáticas. En esta perspectiva teórica se trata de modelizar dentro de un marco coherente, tanto el papel de los sistemas matemáticos de signos, como las estructuras de significados, las reglas matemáticas y la fenomenología que motiva la actividad matemática.

Las razones para utilizar el punto de vista de la semiótica en la comprensión de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas son diversas. La semiótica abarca todos los aspectos de la construcción de signos por el hombre, la lectura e interpretación de los signos a través de los múltiples contextos en que tiene lugar dicho uso. No debe ser, por tanto, extraño el uso de la semiótica para estudiar la actividad matemática, dado el papel esencial del uso de signos en la matemática. Un papel similar desempeñan los signos, los símbolos, notaciones, entre otros, en la comunicación de las ideas matemáticas en el contexto escolar y en los procesos de aprendizaje. En consecuencia parece justificado el estudio de la matemática escolar desde el punto de vista de la ciencia de los signos.

2.7 Didáctica Fundamental de la Matemática.

En la comunidad de investigadores que, desde diversas disciplinas, se interesan por los problemas relacionados con la Educación Matemática, se ha ido destacando en los últimos años, principalmente en Francia, donde sobresalen los nombres de Brousseau,

⁵ Entiéndase como nueva forma de comprensión.

Chevallard, Vergnaud, entre otros. Un grupo que se esfuerza en una reflexión teórica sobre el objeto y los métodos de investigación específicos en Didáctica de la Matemática.

Según Godino(2010), esta línea de investigación se caracteriza por el interés de establecer un marco teórico original, desarrollando sus propios conceptos y métodos y considerando las situaciones de enseñanza-aprendizaje de manera global. Los modelos desarrollados comprenden las dimensiones epistemológicas, sociales y cognitivas y tratan de tener en cuenta la complejidad de las interacciones entre el saber, los alumnos y el profesor, dentro del contexto particular de la clase.

2.7.1 Concepción de la Didáctica de la Matemática; enfoque sistémico.

Se define, la concepción fundamental de la Didáctica de la Matemática como: una ciencia que se interesa, por la producción y comunicación de los conocimientos matemáticos, en lo que esta producción y esta comunicación tienen de específicos de los mismos. Indicando, como objetos particulares de estudio:

- las operaciones esenciales de la difusión de los conocimientos, las condiciones de esta difusión y las transformaciones que produce, tanto sobre los conocimientos como sobre sus utilizadores;
- las instituciones y las actividades que tienen por objeto facilitar estas operaciones.

Los didactas que comparten esta concepción de la didáctica relacionan todos los aspectos de su actividad con las matemáticas. Se argumenta, para basar ese enfoque, que el estudio de las transformaciones de la matemática, bien sea desde el punto de vista de la investigación o de la enseñanza siempre ha formado parte de la actividad del matemático,

de igual modo que la búsqueda de problemas y situaciones que requiera para su solución una noción matemática o un teorema (Brousseau, 1989, citado en D'Amore, 2008).

Una característica importante de esta teoría, aunque no sea original ni exclusiva, es su consideración de los fenómenos de enseñanza - aprendizaje. Bajo esta perspectiva, el funcionamiento global de un hecho didáctico no puede ser explicado por el estudio separado de cada uno de sus componentes, de igual manera que ocurre con los fenómenos económicos o sociales.

Chevallard y Johsua (1982) describen el *sistema didáctico* en sentido estricto formado esencialmente por tres subsistemas: *profesor, alumno y saber enseñado*. Además está el mundo exterior a la escuela, en el que se hallan la sociedad en general, los padres, los matemáticos, etc. pero, entre los dos, debe considerarse una zona intermedia, la *noosfera*, que, integrada al anterior, constituye con él el sistema didáctico en sentido amplio, y que es lugar, a la vez, de conflictos y transacciones por las que se realiza la articulación entre el sistema y su entorno.

La *noosfera* es por tanto la capa exterior que contiene todas las personas que en la sociedad piensan sobre los contenidos y métodos de enseñanza. Brousseau (1986) considera además, como componente el *medio* que está formado por el subsistema sobre el cual actúa el alumno (materiales, juegos, situaciones didácticas, etc.).

2.7.2 Aprendizaje y Enseñanza: Teoría de Situaciones Didácticas.

La teoría que estamos describiendo, en su formulación global, incorpora también una visión propia del aprendizaje matemático, aunque pueden identificarse planteamientos similares sobre aspectos parciales en otras teorías. Se adopta una perspectiva piagetiana, en el sentido de que se postula que todo conocimiento se construye por interacción constante

entre el sujeto y el objeto, pero se distingue de otras teorías constructivistas por su modo de afrontar las relaciones entre el alumno y el saber. Los contenidos son el substrato sobre el cual se va a desarrollar la jerarquización de estructuras mentales.

Pero además, el punto de vista didáctico imprime otro sentido al estudio de las relaciones entre los dos subsistemas (alumno-saber). El problema principal de investigación es el estudio de las condiciones en las cuales se constituye el saber pero con el fin de su optimización, de su control y de su reproducción en situaciones escolares. Esto obliga a conceder una importancia particular al objeto de la interacción entre los dos subsistemas, que es precisamente la situación - problema y la gestión por el profesor de esta interacción.

2.7.3 Relación con el saber: Relatividad del conocimiento respecto de las instituciones.

Desde una perspectiva antropológica, la Didáctica de la Matemática sería el estudio del Hombre - las sociedades humanas - aprendiendo y enseñando matemáticas. Para Chevallard (1989) el objeto principal de estudio de la Didáctica de la Matemática está constituido por los diferentes tipos de sistemas didácticos - formados por los subsistemas: enseñantes, alumnos y saber enseñado – que existan actualmente o que puedan ser creados, por ejemplo, mediante la organización de un tipo especial de enseñanza.

Transposición didáctica

La relatividad del saber a la institución en que se presenta lleva al concepto de transposición didáctica, (Chevallard, 1985), el cual se refiere a la adaptación del conocimiento matemático para transformarlo en conocimiento para ser enseñado.

En una primera fase de la transposición se pasa del saber matemático al saber a enseñar. Se pasa de la descripción de los empleos de la noción a la descripción de la misma noción y la economía que supone para la organización del saber. La constitución de un texto para fines didácticos, reduce así la dialéctica, esencial al funcionamiento del concepto, de los problemas y los útiles matemáticos. Hay una descontextualización del concepto. También se asiste a un fenómeno de deshistorización, por el cual el saber toma el aspecto de una realidad ahistórica, intemporal, que se impone por sí misma, que, no teniendo productor, no puede ser contestada en su origen, utilidad o pertinencia.

Una vez realizada la introducción del concepto, el funcionamiento didáctico va, progresivamente, a apoderarse de él para hacer "algo", que no tiene por qué tener relación con los móviles de quienes han concebido el programa. Su inmersión en el saber enseñado va a permitir finalmente su recontextualización. Pero ésta no conseguirá, en general, sobre todo en los primeros niveles de enseñanza, ni reconstituir el modo de existencia original de la noción, ni llenar todas y únicamente las funciones para las cuales se había decidido introducirlo (Godino, 2010).

2.8 La Fenomenología Didáctica de Freudenthal.

El texto fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas (Freudenthal, 1983) continúa siendo una referencia importante desde el punto de vista de la investigación didáctica, el desarrollo curricular y la práctica de la enseñanza de las matemáticas. Dos nociones introducidas por este autor continúan siendo objeto de interés y reflexión. Se trata de la propia "fenomenología didáctica" y de la "constitución de objetos mentales", como contrapartida de la "adquisición de conceptos".

2.8.1 Fenomenología didáctica.

Para Freudenthal (1983) los conceptos, estructuras e ideas matemáticas sirven para organizar los fenómenos, tanto del mundo real como de las matemáticas. Por medio de las figuras geométricas, como triángulo, paralelogramo, rombo o cuadrado, uno tiene éxito organizando el mundo de los fenómenos de los contornos; los números organizan el fenómeno de la cantidad. En un nivel superior el fenómeno de la figura geométrica se organiza mediante las construcciones y demostraciones geométricas, el fenómeno número se organiza mediante el sistema decimal.

La fenomenología de un concepto matemático, de una estructura matemática o una idea matemática significa, en la terminología de Freudenthal, describir este *noumenon*⁶ en su relación con los *phainomena*⁷ para los cuales es el medio de organización, indicando cuáles son los *phainomena* para cuya organización fue creado y a cuáles puede ser extendido, de qué manera actúa sobre esos fenómenos como medio de organización y de qué poder nos dota sobre esos fenómenos. Si en esta relación entre *noumenon* y *phainomenon* se subraya el elemento didáctico, esto es, si se presta atención a cómo se adquiere tal relación en un proceso de enseñanza-aprendizaje, se habla de la fenomenología didáctica de ese *noumenon*.

2.8.2 La constitución de objetos mentales.

Habitualmente se considera que para concebir un cierto objeto X, se enseña, o se intenta enseñar, el concepto de X. Para conocer los números, grupos, espacios vectoriales,

⁶ En la filosofía de Kant, es lo vinculado a lo que no se puede conocer. El noumenico puede existir pero es completamente imposible de conocer a los seres humanos.

⁷ En la filosofía de Kant, entiéndase como fenómeno o cualquier ocurrencia observable.

relaciones, concebidos, se inculcan los conceptos de número, grupo, espacio vectorial, relación, o, mejor dicho, se intentan inculcar. Es bastante obvio, de hecho, que a las edades en que se intenta, esto no es factible. Por esta razón, entonces, se intenta materializar los conceptos desnudos (en una concretización). Sin embargo, esas concreciones son usualmente falsas: son demasiado bastas para reflejar los rasgos esenciales de los conceptos que tienen que ser materializados, incluso si, mediante una variedad de -materiales concretos-, uno desea dar cuenta de más de una faceta. Su nivel es demasiado bajo, muy por debajo del concepto que se persigue. Didácticamente esto significa que el carro va delante del caballo: enseñar abstracciones haciéndolas concretas (Godino, 2010).

Lo que una fenomenología didáctica puede hacer es preparar el enfoque contrario: empezar por esos fenómenos que solicitan ser organizados y, desde tal punto de partida, enseñar al estudiante a manipular esos medios de organización. Se ha de pedir la ayuda de la fenomenología didáctica si se quiere desarrollar planes para llevar a cabo un enfoque de ese estilo. En la fenomenología didáctica de la longitud, números, etc., los fenómenos organizados por longitud, número, etc., se muestran lo más ampliamente posible. Para enseñar grupos, en vez de empezar por el concepto de grupo y andar buscando materiales que hagan concreto ese concepto, se debería buscar primero fenómenos que pudieran compeler al estudiante a constituir el objeto mental que está siendo matematizado por el concepto de grupo. Si en una edad dada dichos fenómenos no están a disposición de los alumnos, uno abandona el intento –inútil- de inculcar el concepto de grupo.

Para este enfoque contrario Freudenthal evita el término adquisición de concepto. En su lugar habla de la constitución de los objetos mentales, lo que, desde su punto de

vista, precede a la adquisición de conceptos, y puede ser altamente efectivo, incluso si no le sigue la adquisición de conceptos.

La crítica que hace Freudenthal al enfoque de "adquisición de conceptos", parece que se refiere a una manera de concebir las matemáticas como estructuras conceptuales interpretadas como objetos culturales, fijados mediante definiciones y propiedades, descontextualizadas y despersonalizadas. En un enfoque tradicional de la enseñanza se pretende que el alumno aprenda matemáticas, reducidas a esta visión cultural, como producto terminado y fijado discursivamente. En ese proceso de enculturación de los objetos matemáticos se ha perdido su origen como recursos para la resolución de problemas, externos o internos. Esto es, están desligados de la praxis matemática; el concepto como logos, sin la praxis de donde proviene.

Freudenthal defiende poner por delante la fenomenología, o sea, las situaciones problemas que inducen a la acción matemática, al desarrollo de maneras de actuar, que en una fase posterior se regularán mediante el discurso teórico correspondiente. Sus propuestas de acción didáctica se centran en poner al estudiante ante las situaciones-problemas (fenómenos), con lo cual se comenzará a constituir "objetos mentales", es decir, una estructura cognitiva personal que posteriormente podrá ser enriquecida con la visión discursiva cultural.

3. Fundamentos de la Enseñanza y el Aprendizaje de la Matemática.

Al pensar el proceso de enseñanza, resulta inevitable no pensar en el difícil proceso de aprendizaje. También surge de manera simple la idea de las creencias que poseen los docentes sobre la matemática y la capacidad de aprender matemática. La preocupación sobre qué es un cierto conocimiento, forma parte de la epistemología o teoría del conocimiento, una de las ramas de la filosofía. Sin embargo, las creencias sobre la naturaleza de las matemáticas son un factor que condiciona la actuación de los profesores en la clase (Godino, 2004).

Entre la gran variedad de creencias, sobre las relaciones entre las matemáticas y sus aplicaciones y sobre el papel de éstas en la enseñanza y el aprendizaje, podemos identificar dos concepciones extremas. Una de estas concepciones, es la denominada por Godino (2004) como una concepción Idealista Platónica, que fue común entre muchos matemáticos profesionales hasta hace unos años, considera que el alumno debe adquirir primero las estructuras fundamentales de las matemáticas de forma axiomática. Se supone que una vez adquirida esta base, será fácil que el alumno por sí solo pueda resolver las aplicaciones y problemas que se le presenten. Según esta visión, no se puede ser capaz de aplicar las matemáticas, salvo en casos muy triviales, si no se cuenta con un buen fundamento matemático. La matemática pura y la aplicada serían dos disciplinas distintas; y las estructuras matemáticas abstractas deben preceder a sus aplicaciones en la Naturaleza y Sociedad.

Otros matemáticos y profesores de matemáticas consideran que debe haber una estrecha relación entre las matemáticas y sus aplicaciones a lo largo de todo el currículo. Que es importante mostrar a los alumnos la necesidad de cada parte de las matemáticas antes de que les sea presentada. Los alumnos deberían ser capaces de ver cómo cada parte de las matemáticas satisfacen una cierta necesidad. En esta visión denominada pragmática o constructivista, según Font (2004) las aplicaciones, tanto externas como internas, deberían preceder y seguir a la creación de las matemáticas; éstas deben aparecer como una respuesta natural y espontánea de la mente y el genio humano a los problemas que se presentan en el entorno físico, biológico y social en que el hombre vive. Los estudiantes deben ver, por sí mismos, que la axiomatización, la generalización y la abstracción de las matemáticas son necesarias con el fin de comprender los problemas de la naturaleza y la sociedad (Godino, 2004). A las personas partidarias de esta visión de las matemáticas y su enseñanza les gustará poder comenzar con algunos problemas de la naturaleza y la sociedad y construir las estructuras fundamentales de las matemáticas a partir de ellas. De este modo se presentaría a los alumnos la estrecha relación entre las matemáticas y sus aplicaciones.

4. Resumen y Conclusión de Didáctica de la Matemática.

La didáctica general encontró su fortaleza en el carácter prescriptivo y normativo que impregnó su nacimiento y que sirvió para ordenar la enseñanza. Pero el excesivo carácter generalizador (recetas) sin considerar la especificidad epistemológica del contenido escolar ni la naturaleza disciplinar del cual deviene, se convirtió en una camisa de fuerza que desató el surgimiento de las didácticas específicas.

A partir de los años '80 y ante la insuficiencia de las teorías didácticas generales, un movimiento de didactas construye conocimiento desde la óptica de constituir un saber que facilite la interpretación de las prácticas de enseñanza más que su prescripción. Así surge la Didáctica de la Matemática como disciplina que estudia e investiga los problemas que surgen en educación matemática y propone actuaciones fundadas para su transformación.

El profesor Steiner (1985) uno de los pioneros en la investigación y desarrollo de la educación Matemática entrega una definición que considera que la educación matemática admite, una interpretación global dialéctica científica y como todo un sistema social que comprende teoría, desarrollo y práctica. Unos años antes Higginson (1980) había propuesto que la educación matemática se relaciona con otras disciplinas, específicamente con la matemática (qué enseñar), psicología (cómo), sociología (dónde) y filosofía (por qué). Proponiendo en ese momento un modelo tetraédrico de comprensión para la emergente disciplina.

Así la didáctica de la matemática desarrolla distintas perspectivas y líneas de investigación, que configuran el estado del arte de esta problemática. Donde cada una de

estas perspectivas aportan a la comprensión de la enseñanza y aprendizaje de la matemática. Así se tiene que la teoría y filosofía ha entregado teorías y reflexiones teóricas que constituyen una guía para el planteamiento de problemas de investigación y para interpretar los resultados de las mismas, permitiendo así sistematizar los conocimientos dentro de una disciplina, lo que constituye un primer paso para conseguir una visión clara de unidad. Pues, la teorización es un requisito para que un área de conocimiento alcance la categoría de ciencia y pueda desempeñar un papel explicativo y predictivo de diversos fenómenos educativos.

Desde otro punto de vista la psicología de la educación matemática, se dedica al estudio científico de los procesos de enseñanza y aprendizaje, así como de los problemas que en el contexto de los mismos puedan presentarse. Sus principales representantes son Piaget, Bruner y Ausubel cuyas teorías instruccionales subrayan el hecho de que la instrucción es básicamente un intercambio de información, en su acepción más amplia que se produce entre profesores y alumnos y que debe ejercerse en condiciones lo más óptimas posibles para que el objetivo principal, el cual es, que el alumno consiga una asimilación de la información en forma correcta.

Polya (1945), proporcionó el impulso inicial para una nueva línea de investigación denominada; resolución de problemas y modelización. La cual incorpora, investigaciones centradas en la resolución de problemas con ordenadores, la solución experta de problemas, estrategias de resolución y heurísticas de resolución de problemas. Frecuentemente estas investigaciones trabajan con problemas rutinarios que requieren la aplicación de un procedimiento de cálculo estándar, así como problemas no rutinarios, este último tipo de

problemas, son sin duda esenciales en el aprendizaje matemático, pero también son, los que presentan mayor dificultad para los estudiantes, English y Sriraman (2010) evidenciaron que enseñar a los estudiantes sobre estrategias de resolución de problemas, heurísticas y fases en la resolución, influyen poco en la habilidad para resolver problemas generales de matemática, es decir, la resolución de problema es una parte integral del aprendizaje matemático, por lo que no debería ser considerada una parte aislada del currículum.

En los últimos años ha cobrado fuerza la visión y focalización sobre el contexto social de la clase de matemática, configurando la visión socio-cultural desarrollada por Vygotsky y sus colaboradores o seguidores, ellos no trabajaron con temas específicos de matemáticas, sino más bien se interesaron por la naturaleza de la conciencia y en particular con su desarrollo. Identificando una región que llamó “zona de desarrollo próximo” que era la diferencia entre lo que el niño podía hacer por sí mismo y lo que podía hacer con la ayuda de un compañero o adulto experimentado, con esto se dejó en claro que el aprendizaje tiene lugar con otros en tiempo y lugar determinado.

Los didactas han intentado desde hace algún tiempo superar el reduccionismo y el conservadurismo, pregonando que la didáctica de la matemática como ciencia social debe aportar conocimiento que favorezca la emancipación de los alumnos y un cambio social, fraguado desde el interior de la sala de clases. Para ello, se debe potenciar estrategias de reflexión sobre la práctica, por parte de los docentes, sosteniendo que el profesor puede y debe, elaborar teorías pedagógicas a partir de la investigación educativa, eliminando o reduciendo la disociación, que tradicionalmente se ha planteado entre teoría y práctica, esta línea de investigación se denomina investigación acción.

Una sociedad sobre cargada de símbolos y signos ha cobrado fuerza el interés por comprender lo que ocurre al interior del aula desde una perspectiva semiótica, la cual abarca todos los aspectos de la construcción de signos realizada por el hombre, la lectura e interpretación de los signos a través de múltiples contextos en que tiene lugar dicho uso. Entonces surge de manera natural la idea de estudiar el papel que desempeñan los signos, símbolos, notaciones, etc. en la comunicación de las ideas matemáticas en el proceso de aprendizaje.

Construir la disciplina científica didáctica de la matemática, es una de las tareas más importantes que se realiza desde los últimos 50 años por parte de la comunidad matemática y educativa. Son muchos los grupos de investigación que se han esforzado por desarrollar esta nueva disciplina, destacándose el trabajo de los países nórdicos y el desarrollado en centro Europa por el grupo “Didactique des Mathématiques” que en Francia han buscado almargar conceptos, métodos, procesos de investigación que han sido apoyo para muchos investigadores y profesionales de la educación matemática.

Resumir de manera breve, algunas de las ideas de este grupo de investigadores permitirá obtener una visión sobre los modelos propuestos y/o desarrollados que comprenden las dimensiones epistemológicas, sociales y cognitivas y tratan de tener en cuenta la complejidad de las interacciones entre el saber, los alumnos y el profesor, dentro del contexto de la sala de clases.

Así se tiene que Chevallard y Johsua (1982), describen un sistema didáctico conformado por la escuela con sus tres subsistemas (profesor, alumno y saber enseñado) y un mundo exterior a la escuela, no obstante debe considerarse una zona intermedia, la

denominada noosfera, que es donde se producen la articulación entre el sistema y su entorno, es decir, es donde están las personas que en la sociedad piensan sobre los contenidos y métodos de enseñanza.

Unos años más tarde Chevallard (1985), desarrolla el concepto transposición didáctica, el cual se refiere a la adaptación del conocimiento matemático para transformarlo en conocimiento para ser enseñado. En términos de gestión curricular, sería el paso del saber erudito, a los planes y programas (bases curriculares en la actualidad) y el profesor quien realiza la acción para que el alumno aprenda.

La escuela francesa de didáctica de la matemática, a través de Brousseau (1989) define la concepción fundamental de la didáctica de la matemática, como la ciencia que se interesa por la producción y comunicación de los conocimientos matemáticos, es decir, los didactas en esta concepción relacionan todos aspectos de su vida con las matemáticas.

Para Freudenthal al igual que Brousseau, establece que los conceptos, estructuras e ideas matemáticas sirven para organizar los fenómenos, tanto del mundo real como de las matemáticas, teniendo en cuenta que los números organizan el fenómeno de la cantidad el cual se organiza mediante el sistema decimal. De lo anterior, se desprende según el autor la importancia de poner por delante la fenomenología, ósea, las situaciones problemas que inducen a la acción matemática, al desarrollo de maneras de actuar, que en una fase posterior se regularán mediante el discurso teórico correspondiente.

Por último y modo se síntesis, existen en la actualidad diversas perspectivas, visiones y creencias sobre las relaciones entre las matemáticas y sus aplicaciones y sobre el

papel de éstas en la enseñanza y el aprendizaje, distinguiéndose dos concepciones extremas, la concepción “Idealista Platónica” que considera que el alumno debe adquirir primero las estructuras fundamentales de las matemáticas de forma axiomática, asumiendo que así será más fácil que el alumno pueda aplicar y resolver problemas que se le presenten a lo largo de su vida. Y la visión “Pragmática o constructivista” que se esmera en mostrar la estrecha relación entre las matemáticas y sus aplicaciones a lo largo de todo el currículum, es decir, las matemáticas como respuesta natural y espontánea de la mente y del genio humano a los problemas que se presentan en el entorno físico, biológico y social.

A la luz de lo mencionado anteriormente, la propuesta didáctica para la enseñanza de los números complejos, incorpora estrategias metodológicas como: trabajo colaborativo, trabajo individual y uso de recursos TIC. Pues, se debe tener presente que la educación matemática significa desarrollar las facultades físicas, intelectuales y morales de los estudiantes, y no se reduce a una clase magistral, a unos controles o pruebas como medio para valorar los conocimientos o la cobertura de contenidos y muchos otros mecanismos.

La educación matemática entonces, no puede ceñirse solamente a un modelo que mecaniza la enseñanza, convirtiéndola en pasiva, receptiva, memorística; que olvida la espontaneidad de los jóvenes, centrándose en la materia enseñada y que desecha cualquier otra preocupación como el ambiente educativo, la psicología del alumno, la semiótica, el contexto, etcétera. Atento a esto el MINEDUC (2009), publica los Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios de la educación básica y media, donde se plasma el propósito formativo de la matemática, el cual es enriquecer la comprensión de

la realidad, facilitar la selección de estrategias para resolver problemas y contribuir al desarrollo del pensamiento crítico y autónomo en todos los estudiantes.

De esta manera, aprender matemática proporcionaría herramientas conceptuales para analizar la infomación cuantitativa presente en las noticias, opiniones, publicidad y diversos textos, aportando al desarrollo de las capacidades de comunicación, razonamiento y abstracción e impulsando el desarrollo del pensamiento intuitivo y la reflexión sistemática.

A continuación revisaremos el desarrollo de la educación matemática en el sistema educativo chileno, para lo cual se consideraran algunos antecedentes históricos, acontecimientos políticos, desarrollo del currículum y promedios nacionales en pruebas censales como SIMCE, por último se expondrá un resumen del sistema educativo chileno.

5. El Sistema Educativo Chileno.

5.1 Antecedentes.

A lo largo de nuestra historia, la educación ha sido un tema de preocupación para los distintos gobiernos. Ya en 1920, bajo el gobierno de don Arturo Alessandri Palma, se dicta la ley de instrucción Primaria (ley 3.654, 1920) que hacía obligatoria la asistencia de los niños y jóvenes a la escuela, al menos por cuatro años. Dicha obligatoriedad aumenta a 6 años en 1929, gracias a un decreto que reforma la mencionada ley. Luego, en los años 60, se realiza una reforma integral del sistema educativo (precedida por la comisión de Planeamiento Integral de la Educación Chilena) que, entre otros, eleva a 8 años la obligatoriedad de la educación. A principios de los 80 se genera otra importante reforma escolar, descentralizándose la administración de las escuelas estatales desde el Ministerio de Educación (MINEDUC) hacia las municipalidades, así como también un cambio en el financiamiento, otorgándose una subvención por alumno, tanto a estudiantes que asisten a escuelas y liceos públicos como particulares (particular-subvencionado), fomentando el ingreso de proveedores privados (Cox, 2010).

Hacia 1990, con el retorno a la democracia, bajo la presidencia de don Patricio Aylwin, se dio inicio a una nueva agenda y concedió un estatuto docente nacional al profesorado. La nueva agenda se centra en objetivos de calidad y equidad de los contextos y resultados de aprendizaje del sistema escolar. Su realización ha contado con un estado capaz no sólo de velar por condiciones mínimas de funcionamiento de la educación (rol subsidiario), como se venía haciendo desde los años '80, sino también de definir y conducir

políticas de desarrollo del sector. (UNESCO, 2004). El sistema educativo inicia una serie de cambios políticos – administrativos y curriculares, de estos últimos fue el llamado “Ajuste Curricular” del Año 2009. Pero, para hablar de políticas educativas, se debe tener como referencia el artículo “Política y políticas Educativas en Chile 1990-2010” de Cristián Cox⁸. En el cual se identifican dos fases fundamentales: una que va desde la transición en 1990 hasta el año 2006, y otra que se inaugura ese año, cuando un movimiento masivo de protesta estudiantil impacta decisivamente sobre el proceso y luego la agenda de políticas en educación.

En la primera fase (1990-2006): *transición acuerdos y agenda que no incluye dimensiones institucionales.*

El gobierno de la época, que asume en marzo de 1990, inaugura una continuidad ideológica y de actores en el poder gubernamental que abarca los veinte años que se cerraran en marzo del año 2010, después de cuatro gobiernos de la Concertación. Los que originaron e implementaron políticas orientadas por una misma visión de la educación.

El gobierno que realiza la transición (1990-1994) asume en un contexto de práctico empate de fuerzas y especial cuidado del éxito del cambio entre régimen autoritario y régimen democrático. La democracia de los acuerdos y lo ‘políticamente posible’, junto a un Congreso en que hay decisiva presencia de senadores no elegidos (parte del pacto de la transición), establecen desde temprano la imposibilidad de que haya leyes que no sean fruto de acuerdos entre gobierno y oposición. El principio que aplican los gobiernos de la Concertación de que las políticas educacionales debían tener el carácter de políticas de estado, más allá de los plazos de un gobierno y de las divisiones partidarias, se plasma, a lo

⁸ Decano Facultad de Educación, Universidad Católica de Chile.

largo del período, en una política de acuerdos gobierno-oposición sobre educación, que otorga respaldo nacional a las iniciativas mayores en el sector (fomentar la incorporación de privados en la educación o el copago, entre otras), y que tiene algo de necesidad hecha virtud: si se quería actuar en educación sin arriesgar parálisis o riesgos al proceso democrático, no había alternativa a la construcción de acuerdos. Esto tiene como hito mayor el diagnóstico y propuestas de cambio de una políticamente plural Comisión Nacional de Modernización de la Educación, convocada por el Presidente de la República en 1994, que contribuye a sistematizar y concordar entre las dirigencias política, empresarial y educacional del país, las tareas nacionales en educación.

Las políticas resultantes no abordan el núcleo de la regulación de mercado del sector: el Gobierno actúa a través de iniciativas directas, regulaciones e incentivos que establece el Estado, dentro del marco institucional pro elección y competencia de mercado. Esto establece una trama especialmente compleja y ambivalente de resultados: como se verá, de avances importantes en coberturas, como también en equidad considerada en términos de acortamiento de brechas entre grupos socio-económicos en términos no sólo de años de educación sino también logros de aprendizajes, al mismo tiempo que se agudiza una segregación social del alumnado según tipos de establecimientos (municipal, privado subvencionado y privado pagado) y en términos de estratificación social dentro de las dos categorías de establecimientos financiados públicamente. (Valenzuela, Bellei, De los Ríos, 2010).

Segunda Fase: *protesta estudiantil y cambios de agenda y proceso.*

En el año 2006 explota un movimiento estudiantil denominado “revolución pingüina” dirigidos por estudiantes secundarios, con demandas de cambio profundo en educación, a lo largo del mes de Mayo de 2006, reveló al recién asumido Gobierno de Michelle Bachelet y al sistema político en su conjunto que, por presión social, se había abierto una nueva agenda, al cuestionarse dimensiones institucionales y regulativas del sistema educativo.

La demanda estudiantil combinó peticiones corporativas tradicionales (fin a cobros en los exámenes de selección a la universidad, gratuidad en el transporte público, entre otras), con demandas políticas referidas a la organización institucional del sector; fue plasmada por un liderazgo que representaba al conjunto del espectro político; y actuó en el momento inaugural de un gobierno que buscaba un estilo ‘más ciudadano’ y participativo, todo lo cual contribuyó a que el movimiento obtuviera alto apoyo ciudadano y respuestas sin precedentes en su envergadura por parte del sistema político.

Los requerimientos a éste tienen por foco la derogación de la ‘Ley Orgánica Constitucional de Educación’ (LOCE), promulgada por el régimen militar en su último día en el poder, que efectivamente define los pilares institucionales y regulativos del sector; agregan, además, la revisión de la ‘Jornada Escolar Completa’ (un pilar de la reforma de los Noventa) y de la ‘municipalización de los establecimientos’ (pilar de la reforma descentralizadora y privatizadora de los años Ochenta). Cruza a estas dimensiones de cuestionamiento y demanda, el juicio de que los gobiernos de la *Concertación* habían fallado respecto de una de sus promesas claves: lograr un sistema escolar más equitativo. Pues mientras más estudiantes que nunca concluían su educación secundaria, había diferencias significativas, en la calidad ofrecida por las tres categorías de instituciones del

sistema escolar, lo que trae consecuencias para su futuro en la educación superior y en las oportunidades que ésta habría.

Desde el fin de 2006 y por los siguientes tres años, el Congreso del país discute iniciativas de Ley que intentan concretar en estos acuerdos: una Ley General de Educación que reemplaza la LOCE de 1990, promulgada en Octubre de 2009; una Ley de Aseguramiento de la Calidad de la Educación, promulgada bajo un nuevo gobierno, de derecha, en 2011; una ley de Fortalecimiento de la Educación Pública, también en el Congreso, en 2012 sin haber iniciado su procesamiento.

Las nuevas leyes, proponen cambios sustantivos a la regulación del sistema escolar, los que sin eliminar el papel de la competencia y la libertad de elección de las familias y por tanto principios de 'libertad de enseñanza' y mecanismos de mercado, acrecientan sustancialmente el papel del Estado en: i) el aseguramiento de un derecho mucho más exigente que el de acceso a la educación, como es el derecho a una educación de calidad, definida públicamente; ii) velar por unos requisitos de operación mínimos de la provisión educativa, más elevados que los vigentes (que tocan a administradores, docentes, condiciones físicas e institucionales); iii) asegurar unos procesos y resultados de calidad, a través del establecimiento de estándares cuya evaluación acarrea consecuencias, fiscalización de uso de los recursos y obligaciones de rendición de cuentas. Al conjunto se agregan las iniciativas de mejoramiento absoluto y relativo de la subvención, de acuerdo al principio que la matrícula socio-económicamente vulnerable, si efectivamente se la quiere proveer de oportunidades de aprendizaje como para lograr los objetivos definidos en el currículo, supone más recursos.

5.2 El Currículum.

El término *Currículum* proviene del latín de la palabra “Currere”, que hace referencia a carrera, a un recorrido que debe ser realizado. De lo anterior, se puede pensar que la escolaridad es un recorrido que un estudiante debe realizar o una tarea (derecho) que el estado debe asegurar (Sacristan, 1996).

El currículum es una selección cultural, política y económica con propósitos formativos, que organiza la trayectoria de alumnos y alumnas en el tiempo y en los contenidos, esquemas mentales, habilidades y valores que contribuye a comunicar, es un regulador mayor de su experiencia futura (Bernstein, 1998).

La universalización de la educación primaria no ha sido fácil para Chile, y solo después de 60 años de aplicación de políticas al respecto se puede señalar que desde los años 80 se cumplió debidamente con ella (8 años). Con el retorno a la democracia, subyace a la reforma curricular el “acuerdo social” del sistema escolar a comienzos de los noventa era anacrónico, y que requería una transformación profunda para preparar a sus estudiantes para comprender el mundo y competir en él, de una manera que les permitiría crecer a las personas y al país, una economía y una sociedad dinámica en el nuevo contexto nacional e internacional. Esta visión básica es la que plasmó la Comisión Nacional de Modernización de la Educación de 1994, y que sostiene el cambio del currículum escolar.

El sistema escolar inició en 1997 la implementación de un nuevo currículum en el primer ciclo básico, proceso que culminó en 2002, cuando el cambio de programas de estudio alcanzó a los octavos y cuartos años medios. En segunda instancia, a partir del año 2003 se define la obligatoriedad de la enseñanza secundaria (4 años), cerrando así un ciclo

de doce años de escolaridad obligatoria, proceso que ha tenido una fuerte expansión, pero que aún no registra plena cobertura, especialmente por los problemas endémicos de deserción que afectan a la población escolar más vulnerable de ese nivel de enseñanza.

El tema principal sobre el currículum y su reforma hoy en día, tanto en el sistema escolar como en la educación superior, con independencia de historias y de geografías, es el cambio marcado y rápido de la cultura de la cual selecciona sus orientaciones y contenidos. El cambio mayor implicado en los términos ‘sociedad globalizada y del conocimiento’, tiene consecuencias directas sobre las definiciones del qué y para qué de la experiencia formativa que se ofrece a niños y jóvenes en la institución escolar. Tal cambio y sus implicancias sobre el desarrollo socio-económico y ciudadano del país constituye la base de la reforma del currículum de escuelas, colegios y liceos: reforma de la experiencia formativa que se busca organizar, a lo largo de doce años, para un poco más de tres millones de alumnos y alumnas. Transformación por tanto, del pivote en torno al cual gira el resto de los cambios constitutivos de la reforma educacional del cambio de siglo en Chile.

Transcurridos diez años de iniciada la reforma curricular de la educación básica y media, el ministerio de Educación ha desarrollado un proceso de revisión del currículum, para responder a diversos requerimientos sociales y para mantener su vigencia y relevancia. Esta revisión es parte de una política de desarrollo curricular que busca mejorar cíclicamente el currículum a la luz de su implementación y de los cambios que se van experimentando en la sociedad.

Lo antes dicho, se relaciona directamente con las características de la sociedad actual; el currículum debe ser capaz de responder oportunamente a la rápida generación de cambios en el conocimiento, a las transformaciones constantes del mundo productivo y a las nuevas exigencias formativas que se van demandando. Así a fines del año 2008 el consejo superior de educación, entrega el ajuste curricular de 2009, que buscaba en su primera etapa, resolver problemas de organización general, currículum relacionados con nomenclatura de los distintos sectores de aprendizaje, la organización de los objetivos fundamentales transversales en educación básica y media, la integración de las ciencias y ciencias sociales en primer ciclo básico, la educación técnico profesional, la presencia de inglés en currículum y la existencia de niveles bianuales en primer ciclo básico.

Para ello se realizaron cambios en:

a) Los sectores de aprendizaje:

- Mejorar la redacción de los objetivos fundamentales y contenidos mínimos obligatorios.
- Mejorar a articulación entre los distintos ciclos de estudio.
- Visibilizar la presencia de las habilidades en contenidos mínimos obligatorios.
- Reducir la extensión del currículum (Ciencias Sociales y Naturales)
- Fortalecer la presencia transversal del uso de TIC.

b) Para las especialidades Técnico-Profesional(TP):

- Actualizar los perfiles de ingreso de las especialidades, de acuerdo a estudios de pertinencia laboral y educativa.

- Ajustar el perfil de egreso al nivel de enseñanza media, articulando estos con los perfiles profesionales de cada especialidad elaborados por el sector productivo.
- c) Temas de organización del currículum.
- Homologar la nomenclatura de las asignaturas en educación básica y media.
 - Homologar los objetivos fundamentales transversales en educación básica y media.
 - Definir objetivos y contenidos mínimos para inglés.

5.3 Gestión Curricular.

En los gobiernos de Eduardo Frei Ruiz-Tagle y posteriormente de Ricardo Lagos Escobar, se llevó a cabo el mayor cambio del currículum escolar, el cual abarcó desde el nivel parvulario a la educación secundaria, fundado en la necesidad de organizar la experiencia escolar acorde a objetivos y contenidos relevantes a los requerimientos de la sociedad “global y del conocimiento”, como a superar el anacronismo y las orientaciones ideológicas del currículum del contexto autoritario. La reforma de los objetivos y contenidos de la educación parvularia, básica y media abarca: i) las características de su estructura (qué secuencia de años, organizada cómo; qué distinciones dentro de tal secuencia), donde la reforma establece un cambio importante, al mover ‘hacia arriba’ en dos grados (del 8 al 10), el inicio de la diferenciación tradicional de la educación media, en una general y otra técnico-profesional; ii) su *organización* en espacios curriculares determinados dentro de tal estructura (en que, entre otros, se redefine el inicio de la enseñanza del segundo idioma y se

establece una nueva área: educación tecnológica); iii) cambios de orientación y contenidos *dentro* de tales *espacios curriculares*, áreas, o asignaturas (Cox, 2003).

El proceso de cambio del *qué* y *el para qué* de la educación que plasma el nuevo currículo oficial tiene como características distintivas: su carácter prolongado (1995-2002), la base profesional amplia de su elaboración, procesos participativos de escala nacional, referencia a estándares internacionales, y ausencia relativa de conflicto.(Picazo, 2001; Cox, 2006).

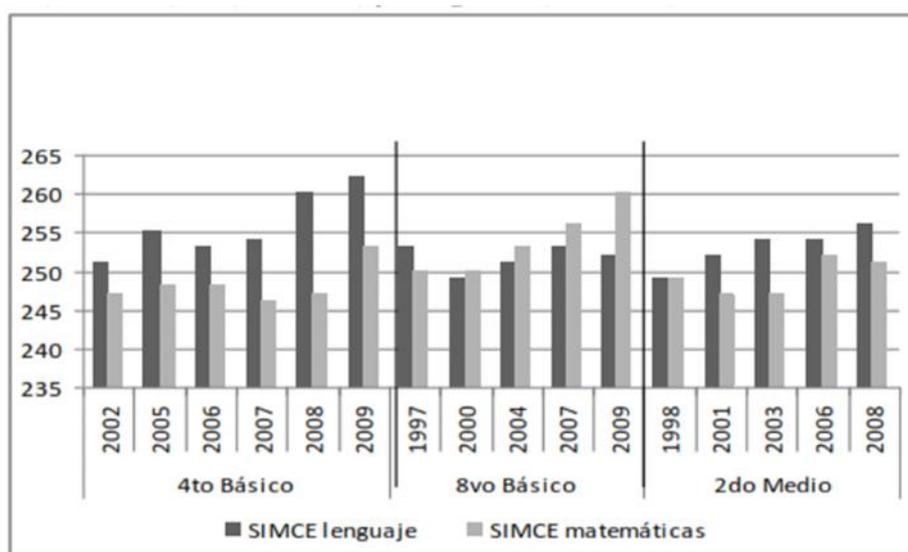
El propósito del cambio que plantean los nuevos objetivos y contenidos en cada asignatura, es dotar a cada alumno y alumna de herramientas intelectuales y morales que los habiliten plenamente para su vida como personas, trabajadores y ciudadanos en la sociedad del siglo XXI. Se entiende que tendencias seculares propias a la sociedad del conocimiento y el proceso de globalización le exigen al sistema escolar, mayor capacidad para formar en unas nuevas habilidades, o con mayor nivel e intensidad en unas habilidades que han sido objetivos de aprendizaje tradicionales.

Entre estas destacan: capacidad de abstracción, pensamiento sistémico, experimentación y aprender a aprender, comunicación y trabajo colaborativo, resolución de problemas, manejo de la incertidumbre y adaptación al cambio. Al nuevo currículo se le exige así mismo, desde la historia reciente del país, el desarrollo de habilidades y actitudes ciudadanas basadas en la valoración de la democracia y de los derechos humanos (MINEDUC, 1998).

Al mirar el sistema educativo a través del Sistema de Medición de la Calidad de la Educación (SIMCE), desde el año 1998 al 2008 (Ver Figura N°2), observamos que hay avances notorios en cuarto año básico, y estos equivalen a un quinto de Desviación

Estándar entre 2002 y 2009 (12 puntos en la escala SIMCE, en la que 50 puntos equivalen a una D.S). También en prueba de matemática de octavo básico, se observa una mejoría equivalente. Mientras que no se observan mejoras significativas en segundo año medio (Cox, 2006).

Fig. 2. Evolución del promedio nacional de puntajes SIMCE 4° (2002 - 2009), 8°(1997 - 2009) 10° Grado (1998 - 2008).



Fuente: Ministerio de Educación, Informe Resultados prueba SIMCE cada año.

De lo anterior, se constata que las reformas diseñadas externamente no están funcionando uniformemente, las diferencias entre centros es la norma, por lo que resulta evidente reconocer que, en último extremo, el centro escolar y toda su organización administrativa y curricular, es el factor clave (Bolívar, 1999).

Desde el año 2003 el Ministerio de Educación de Chile ha implementado una serie de mecanismos para el aseguramiento de la calidad de los servicios educativos, entre los que cabe destacar; el Marco para la Buena Enseñanza, Marco para la Buena Dirección, Modelo de Gestión Escolar, acreditación de universidades y carreras, implementación de la

evaluación docente y el Sistema de Aseguramiento de la Calidad de la Gestión Escolar (SACGE), afín de mejorar los resultados obtenidos en pruebas estandarizadas nacionales e internacionales.

El SACGE, se define como un conjunto coordinado de componentes, herramientas y recursos de apoyo al mejoramiento continuo de los procesos de gestión escolar, esto es, de las condiciones organizacionales para la obtención de resultados educativos. Se plantea entonces, articular iniciativas, herramientas, recursos e incluso actores (docentes, directivos, sostenedores y supervisores), que deberían estar implicados en el aseguramiento de la gestión escolar (MINEDUC, 2005).

Bajo el gobierno de Sebastián Piñera Echeñique, el 11 de agosto de 2011 se publica la Ley N.º 20529, la cual crea el Sistema Nacional de Aseguramiento de la Calidad de la Educación Escolar, que tiene como finalidad mejorar la calidad de la educación para que todos nuestros niños y jóvenes puedan tener igualdad de oportunidades.

El Sistema Nacional de Aseguramiento de la Calidad de la Educación diseña una nueva institucionalidad en educación y crea dos organismos: la Superintendencia de Educación y la Agencia de Calidad de la Educación. La Superintendencia tendrá la tarea de fiscalizar el uso de los recursos, el cumplimiento de la normativa educacional, atender denuncias y reclamos, y establecer sanciones. La Agencia de Calidad tiene como fin evaluar los logros de aprendizaje, dar orientaciones de mejora en el desempeño de los establecimientos e informar a la comunidad. Esta ley también redefine algunas funciones del Ministerio de Educación y del Consejo Nacional de Educación, que pasarán a ser desempeñadas íntegramente por la Agencia de Calidad y la Superintendencia de Educación Escolar.

5.4 Resumen y Conclusiones Sistema Educativo

Con el retorno a la democracia en manos del presidente Patricio Aylwin, se da inicio a una nueva agenda y concedió un estatuto docente nacional al profesorado. Esta agenda se centra en objetivos de calidad y equidad de los contextos y resultados de aprendizaje del sistema escolar. Su realización ha contado con un estado capaz no sólo de velar por condiciones mínimas de funcionamiento de la educación (rol subsidiario), como se venía haciendo desde los años '80, sino también de definir y conducir políticas de desarrollo del sector (UNESCO,2004).

La agenda de mejoramiento de la calidad de los aprendizajes y de la equidad de su distribución social, en su primera etapa fue abordada a través de un conjunto diversificado de programas diseñados y financiados por el Ministerio de Educación, y conformados todos ellos por una combinación variable de inversiones en medios y tecnologías destinadas a levantar las condiciones materiales del aprendizaje, con apoyos directos e indirectos para la renovación y fortalecimiento de prácticas pedagógicas y de gestión.

Las estrategias (programas) son fundamentalmente de apoyo material y técnico a las unidades educativas. A partir de una intervención en 1990 en sólo el decil de escuelas básicas de más pobres resultados (P-900), la estrategia se expande y complejiza, abarcando el conjunto de la educación básica a partir de 1992, luego el conjunto de la educación media desde 1995, y la formación docente desde 1997. Hacia el final de la década, se agregan nuevas intervenciones focalizadas en el nivel medio, como lo fueron; “Monte Grande (1997-2000)”, “Liceo para todos (2000-2006)” y el último promovido fue “Liceos Bicentenario de Excelencia (2010 a la fecha)”.

El sistema escolar en su conjunto está en transición de un currículum prescrito en unas definiciones oficiales, a un currículum implementado que es asumido en los proyectos educativos y en la gestión de los establecimientos y vivido por tanto como oportunidades efectivas de aprendizaje en las salas de clases, talleres, laboratorios, entre otros. En la actualidad, fue necesario (luego de manifestaciones sociales) crear una nueva institucionalidad que respondiera a las nuevas demandas sociales y el derecho a libertad de enseñanza; con la nueva institucionalidad definida en la ley N°20529, en la cual se redefinen las funciones del Ministerio de Educación y Consejo Nacional de Educación, transfiriendo alguna de ellas a la Superintendencia de Educación Escolar y la Agencia de Calidad de la Educación. Esta última, tiene como objetivo evaluar y orientar el sistema educativo para que éste propenda al mejoramiento de la calidad y equidad de las oportunidades educativas, considerando las particularidades de los distintos niveles y modalidades educativas.

La agencia de calidad entonces, evaluará los logros de aprendizaje de los alumnos de acuerdo al grado de cumplimiento de los estándares, referidos a los objetivos generales y otros indicadores de calidad educativa, para estos efectos se realizarán mediciones externas. Con la información recabada la agencia procederá a la ordenación de los establecimientos, en la cual la ponderación de los estándares de aprendizaje no podrá ser inferior al 67% del total. Esto último, ha tensionado la educación primaria y secundaria, reduciendo ésta a solo preparar una prueba de selección múltiple y dejando de lado la formación valórica, artísticas, musical y ética de los estudiantes.

En los estudios de Booth y Elliot – Johns (2009) revelaron evidencias de que el entorno escolar influye de manera significativa en el rendimiento de los estudiantes, de

manera especial los procedimientos de gestión y organización escolar que con frecuencia hacen diferencias entre géneros. Del mismo modo, el trabajo de los docentes en la sala de clases también tiene consecuencias en los estudiantes.

Si dentro de los establecimientos existe mayor conocimiento de las distintas formas en que los estudiantes aprenden, los docentes podrían ajustar sus prácticas en las salas de clases a dichas diferencias, y de esta forma, mejorar sus resultados (Booth y Elliot-Johns, 2009). En definitiva, comprender las diferencias de estilos de aprendizaje de los estudiantes o las metodologías que más favorecen el aprendizaje, podrían favorecer procesos de enseñanza-aprendizaje más eficaces.

Para ello a continuación revisaremos, algunos antecedentes empíricos relacionados con la enseñanza –aprendizaje de los números complejos, los cuales corresponden a investigaciones internacionales relevantes por el hecho de marcar precedentes, en la construcción de significado, los errores asociados y una comparación entre dos países sobre el estudio de los números complejos.

6. Antecedentes Empíricos.

En el siguiente apartado, se expondrá algunos estudios previos, relacionados con los números complejos; la construcción de su significado, la enseñanza y el aprendizaje de los números complejos y los errores asociados a la representación Geométrica Vectorial de números complejos: un análisis Ontosemiótico. Todos estos estudios nos permiten ilustrar el estado del arte, en relación al problema de investigación.

Una Construcción de Significado de Número Complejo.

Se hace necesario revisar lo investigado por Martínez, G. y Antonio, R. (2009) profundizaron acerca de la construcción del conocimiento. En particular, en el estudio de los procesos presentes en la articulación de los sistemas conceptuales matemáticos a los que, ellos mismo han llamado *procesos de convención y articulación matemática* (Martínez-Sierra, 2005). De manera específica este trabajo indaga sobre qué alternativas pueden ser factibles para la construcción escolar del significado de los números complejos, bajo la hipótesis de que su significado puede ser construido a través del proceso de convención matemática. El análisis de la producción de los estudiantes, al trabajar una secuencia de actividades diseñada por ellos en base a la hipótesis planteada, da evidencia de que a pesar que los estudiantes insistían en que “las raíces cuadradas de números negativos no existen”, nuestra secuencia los indujo a operar con ellos y de esta manera construir un significado en el plano operativo.

La Enseñanza y el Aprendizaje de los Números Complejos. Un estudio comparativo España- Rumania.

En esta investigación, desarrollada el año 2007, por los académicos Bhulea, C. y Gomez, B. de la universidad de Valencia, España. Muestran que desarrollaron una investigación, diseñada y estructurada según los Modelos Teóricos Locales de Filloy, la cual permite, mediante un análisis histórico-epistemológico y un análisis comparativo de libros de texto de dos países, hacer emerger dificultades conceptuales y procedimentales de los números complejos que puedan reproducirse en los estudiantes de los dos países. Además, este modelo permitió diseñar un cuestionario para estudiantes de bachillerato de ambos países, con el fin de poder establecer si estas dificultades están favorecidas por un determinado modelo de enseñanza o son consecuencia directa de la complejidad propia de los números complejos. De acuerdo a la discusión planteada por los autores toda la información conseguida sustentará sugerencias de intervención en las pautas educativas de los currículos de España y Rumania, en relación con esta temática.

Errores Asociados a la Representación Geométrica-Vectorial de Números Complejos: un análisis ontosemiótico.

Distefano et al, en junio de 2012 publica en la revista Iberoamerica de Educación Matemática una investigación realizada al alero de la Universidad Nacional de Mar del Plata, Argentina. Esta investigación tuvo por objetivo realizar un análisis de las dificultades y errores que se generan cuando los alumnos usan representaciones aritmético-algebraicas y geométrico-vectoriales de los números complejos. Como marco teórico metodológico se ha utilizado el enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. Para ello se trabajó con las producciones escritas de 135 estudiantes de álgebra, de una carrera de

Ingeniería, quienes mostraron mayores dificultades cuando debieron hacer uso de una representación geométrico-vectorial.

A través del análisis de las configuraciones cognitivas de los ejercicios propuestos en la evaluación parcial, se comprobó que una proporción de los alumnos sólo pudo hacer un uso correcto de la representación aritmético-algebraica, mientras que el uso de la representación geométrica –vectorial fue deficiente o nulo.

Por otra parte, dupla objeto/representación se constituye en una herramienta de evaluación de uno de los aspectos de la idoneidad cognitiva de la trayectoria didáctica implementada: la distancia entre los significados pretendidos y los declarados. Esto promueve, como objetivos de futuras investigaciones, el análisis de las prácticas ligadas a la representación geométrico-vectorial de los números complejos.

7. Resumen y Conclusiones de la Parte I: MARCO TEORICO

En este apartado se resumen los antecedentes teóricos tratados, extrayéndose conclusiones de interés para el presente estudio. También se resumen y establecen los principales componentes del marco teórico, desde el que se aborda, la parte empírica de la investigación.

Construir la disciplina científica didáctica de la matemática, es una de las tareas más importantes que se realiza desde los últimos 40 años por parte de la comunidad matemática y educativa. Son muchos los grupos de investigación que se han esforzado por desarrollar esta nueva disciplina, destacándose el trabajo de los países nórdicos y el desarrollado en centro Europa por el grupo “Didactique des Mathématiques” que en Francia han buscado

amagar conceptos, métodos, procesos de investigación que han sido apoyo para muchos investigadores y profesionales de la educación matemática.

La disciplina didáctica de las matemática, ha comenzado su desarrollo teórico a partir de los años ´80, con el gran aporte realizado por el profesor Higginson (1980) quien propuso que la educación matemática se relaciona con otras disciplinas, específicamente con la matemática (qué enseñar), psicología (cómo), sociología (dónde) y filosofía (por qué). Proponiendo en ese momento un modelo tetraédrico de comprensión para la emergente disciplina. Unos años más tarde Steiner (1985), considera que la educación matemática admite, una interpretación global dialéctica científica, como todo sistema social que comprende teoría, desarrollo y práctica. Así surge la Didáctica de la Matemática como disciplina que estudia e investiga los problemas que surgen en educación matemática y propone actuaciones fundadas para su transformación.

Así, la didáctica de la matemática, se desarrolla desde distintas perspectivas y líneas de investigación, que configuran el estado del arte de Educación Matemática. Donde cada una de éstas perspectivas aporta a la comprensión de la enseñanza y aprendizaje de la matemática.

De acuerdo a lo anterior Polya (1945), proporcionó el impulso inicial para una nueva línea de investigación denominada resolución de problemas y modelización que incorpora investigaciones centradas en la resolución de problemas con ordenadores, la solución experta de problemas, estrategias de resolución y heurísticas de resolución de problemas. Frecuentemente estas investigaciones trabajan con problemas rutinarios que requieren la aplicación de un procedimiento de cálculo estándar, así como problemas no

rutinarios, este último tipo de problemas, son sin duda esenciales en el aprendizaje matemático, pero son también los que presentan mayor dificultad para los estudiantes, English y Sriraman (2010) evidenciaron que enseñar a los estudiantes sobre estrategias de resolución de problemas, heurísticas y fases en la resolución, influyen poco en la habilidad para resolver problemas generales de matemática, es decir, la resolución de problema es una parte integral del aprendizaje matemático, por lo que no debería ser considerada una parte aislada del currículum, por lo anterior, dentro del diseño planificado se consideran problemas rutinarios y no rutinarios, integrados en el proceso de aprendizaje de los estudiantes.

Otra forma de contribuir ha sido la desarrollada por la escuela francesa de didáctica de la matemática, quien a través de Brousseau (1989) define la concepción fundamental de la didáctica de la matemática, como la ciencia que se interesa por la producción y comunicación de los conocimientos matemáticos, es decir, los didactas en esta concepción relacionan todos aspectos de su vida con las matemáticas.

Así tenemos que Chevallard y Johsua (1982), describen un sistema didáctico conformado por la escuela con sus tres subsistemas (profesor, alumno y saber enseñado) y un mundo exterior a la escuela, no obstante debe considerarse una zona intermedia, la denominada noosfera, que es donde se producen la articulación entre el sistema y su entorno, es decir, es donde están las personas que en la sociedad piensan sobre los contenidos y métodos de enseñanza.

Unos años más tarde Chevallard (1985), desarrolla el concepto *transposición didáctica*, el cual se refiere a la adaptación del conocimiento matemático para transformarlo

en conocimiento para ser enseñado. En términos de gestión curricular, sería el paso del saber erudito, a los planes y programas (bases curriculares en la actualidad) y el profesor quién realiza la acción para que el alumno aprenda.

Por último, y modo de síntesis de lo antes descrito se tiene, que existen en la actualidad, según Godino (2010) diversas perspectivas, visiones y creencias sobre las relaciones entre las matemáticas y sus aplicaciones y sobre el papel de éstas en la enseñanza y el aprendizaje, distinguiéndose dos concepciones extremas, la concepción “Idealista Platónica” que considera que el alumno debe adquirir primero las estructuras fundamentales de las matemáticas de forma axiomática, asumiendo que así será más fácil que el alumno pueda aplicar y resolver problemas que se le presenten a lo largo de su vida. Y la visión “Pragmática o constructivista” que se esmera en mostrar la estrecha relación entre las matemáticas y sus aplicaciones a lo largo de todo el currículum, es decir, las matemáticas como respuesta natural y espontánea de la mente y del genio humano a los problemas que se presentan en el entorno físico, biológico y social.

Una vez mostrado el estado del arte de la didáctica de la matemática a nivel mundial, las principales líneas de investigación, concepciones y perspectivas. Corresponde concluir y mostrar cómo va avanzando nuestro sistema educativo hacia una educación más equitativa, democrática y centrada en las competencias por sobre los contenidos.

Después del término del régimen militar y el retorno de una democracia, aunque aún existían trabas legislativas, como la Ley Orgánica Constitucional de Enseñanza, aprobada el último día de dictadura. Fue el presidente Patricio Aylwin, quién dio inicio a una nueva

agenda y concedió un estatuto docente nacional al profesorado. La agenda, se centra en objetivos de calidad y equidad de los contextos y resultados de aprendizaje del sistema escolar. Su realización ha contado con un estado capaz no sólo de velar por condiciones mínimas de funcionamiento de la educación (rol subsidiario), como se venía haciendo desde los años ´80, sino también de definir y conducir políticas de desarrollo del sector (UNESCO, 2004).

La agenda de mejoramiento de la calidad de los aprendizajes y de la equidad de su distribución social, en su primera etapa fue abordada a través de un conjunto diversificado de programas diseñados y financiados por el Ministerio de Educación, y conformados todos ellos por una combinación variable de inversiones en medios y tecnologías destinadas a levantar las condiciones materiales del aprendizaje, con apoyos directos e indirectos para la renovación y fortalecimiento de prácticas pedagógicas y de gestión. Por tanto, se prefirió dotar a las escuelas, colegios y liceo de infraestructura, insumos y recursos tecnológicos que favorecieran la alfabetización de los niños y jóvenes chilenos, dejando la calidad en segundo plano. Dicha calidad, que entendemos hoy en día como el logro de aprendizajes y el cumplimiento de ciertos estándares que se traducen en, entrega de recursos adicionales a colegios “exitosos” y una clasificación de los mismo en desempeño alto, medio, medio-bajo e insuficiente, tarea encargada a la Agencia de Calidad de la educación, institución creada al alero de la ley N°20.529 que establece el Sistema Nacional de Aseguramiento de la Calidad de la Educación Parvularia, Básica y Media y su Fiscalización.

Por tanto, el currículum desde regreso a la democracia se ha visto tensionado por los partidos políticos y lo que el mundo del siglo XXI demanda para los estudiantes, es decir, el sistema escolar en su conjunto está en transición de un currículum prescrito en unas

definiciones oficiales, a un currículum implementado que es asumido en los proyectos educativos y en la gestión de los establecimientos y vivido por tanto como oportunidades efectivas de aprendizaje en las salas de clases.

PARTE II: MARCO METODOLÓGICO

8. Objetivos de Investigación

8.1 Objetivo General

- Proponer un diseño didáctico para la enseñanza de los números complejos, que incorpore trabajo individual, colaborativo y uso de recursos TIC como insumo para la gestión curricular de centro.

8.2 Objetivos Especificos

- Identificar las dificultades del docente en la enseñanza de los números complejos en tercero medio.
- Identificar las potencialidades del docente en la enseñanza de los numeros complejos en tercero medio.
- Identificar las estrategias didácticas que favorecen el proceso de enseñanza – aprendizaje de los números complejos en estudiantes de tercero medio.
- Identificar la actitud hacia la matemática de los estudiantes de tercero medio tras la aplicación de la unidad de Números Complejos.
- Generar recomendaciones para la enseñanza de los números complejos en la enseñanza secundaria.
- Generar recomendaciones relativas al apoyo de la Unidad Técnica Pedagógica debe brindar a los docentes que enseñan que enseñan números complejos.

8.3 Supuesto de Investigación

En los experimentos de enseñanza, no existen hipótesis a ser probadas sino que la conjetura es la guía de la investigación, es decir, en una inferencia basada en pruebas incompletas o no concluyentes. En el presente estudio la conjetura es que utilizando diversas estrategias didácticas, se facilita el proceso de enseñanza-aprendizaje de los números complejos.

9. Metodología

Este trabajo, es una investigación basada en diseño (Design, Based Research). En este apartado se describe en qué consiste el paradigma metodológico denominado investigación de diseño, detallando su origen y evolución, sus principales características y algunos criterios de calidad. Posteriormente se presenta el diseño ejecutado.

9.1 Investigación de Diseño

Collins (1992) distingue entre ciencias de lo artificial o de diseño y las ciencias naturales o analíticas, haciendo énfasis en la importancia de abordar la educación como una ciencia de diseño, no como una ciencia analítica, para poder determinar cómo diferentes diseños de ambientes de aprendizajes contribuyen al aprendizaje, cooperación, motivación y otras variables dependientes del proceso de enseñanza-aprendizaje. Para llevar a cabo dicha exploración, se recomienda: (Molina, 2006)

- Involucrar a los docentes como investigadores.

- Comparar innovaciones
- Llevar a cabo valoraciones objetivas.
- Seleccionar innovaciones prometedoras.
- Variar sistemáticamente
- Realizar revisiones frecuentes
- Evaluar el éxito utilizando criterios múltiples.

Los estudios que pertenecen a la investigación de diseño son denominados indistintamente como investigaciones, estudio o experimentos de diseño o basados en diseño. Este tipo de metodología, de naturaleza principalmente cualitativa, ha sido desarrollada dentro de las ciencias del aprendizaje (Learning Sciences), un campo multidisciplinar que estudia el aprendizaje y la enseñanza y abarca la antropología, la psicología educativa, la sociología, la neurociencia, así como las didácticas específicas, en este caso didáctica de la matemática (Confrey, 2006).

La principal consideración de esta metodología, es que el uso de métodos, que conectan los procesos de actuación con los resultados, tiene el poder de generar conocimiento de aplicación directa a la práctica. Se permite comprender los procesos de enseñanza y aprendizaje, cuando el investigador actúa activamente como educador, abordando simultánea e interactivamente los procesos científicos de descubrimiento, exploración, confirmación y desviación (Kelly, 2003).

Idealmente la metodología de diseño conduce a una mayor comprensión de los ambientes de aprendizaje mediante el diseño de sus elementos y la anticipación de cómo éstos van a funcionar conjuntamente para promover el aprendizaje. Más allá de crear

diseños eficaces para un determinado aprendizaje, los estudios de diseño explican por qué el diseño funciona y sugiere modos en que puede ser adaptado a nuevas circunstancias (Cobb et al, 2003).

El objetivo es producir conocimiento, apoyado por la evidencia, que guíe la toma de decisiones de la práctica educativa para mejorar el aprendizaje de los alumnos. No se pretende prescribir prácticas de enseñanza, sino más bien dar marcos explicativos acompañados de datos, evidencias y argumentos según Confrey (como citó Molina, 2006), los marcos explicativos son modelos de resultados probables, íntimamente conectados a sus teorías, tan robustos como su unión a evidencias, que proceden de múltiples interacciones en ambientes auténticos; tan rigurosos como la documentación y análisis que subyacen a los aspectos anteriormente mencionados y por sobre todo tan válidos como útiles sean para personas experimentadas en contextos similares. Es decir estos estudios son de gran utilidad para investigar el desarrollo de conocimiento en ambientes enriquecidos, donde emergen ideas que difícilmente se desarrollan en ambientes naturales.

9.2 Características de la investigación basada en diseño

Las tres principales características de las investigaciones basadas en diseño son:

1. Estos estudios se centran en la caracterización de la situación en toda su complejidad, la mayor parte de la cual no es conocida a priori. Las clases o ambientes de enseñanza son considerados complejos y condicionales, siendo necesarias una amplia gama de medidas de resultados para capturar el proceso de aprendizaje, que allí tiene lugar así como el estado final del alumno. Esta complejidad hace esencial distinguir entre

aquellos elementos que van a ser objeto de estudio y aquellos otros que se consideran accidentales o se asumen como condiciones del entorno (Cobb et al, 2003).

2. Las teorías que se desarrollan durante el proceso del experimento son humildes, en tanto que son específicas a un dominio de aprendizaje y porque son explicativas de la actividad del diseño. Estos estudios no proveen de grandes teorías de aprendizaje, sino que tienen un alcance teórico intermedio. No obstante, estas teorías son esenciales para la mejora de la educación (Cobb et al,2003).
3. Involucra diferentes tipos de participantes en el diseño, para utilizar diferentes experiencias en la producción y análisis de éste; estando siempre implicada en el proceso de investigación, la persona que actúa como docente (Molina,2006).

9.3 Evaluación de los estudios de diseños

La investigación de diseño es una metodología incipiente en el campo de la investigación educativa, se encuentra en discusión los aspectos necesarios para garantizar su rigurosidad, así como el modo en que se debe evaluarse su calidad. Por su naturaleza, los estudios de diseño son complejo, multivariados y multiniveles e intervencionistas; haciendo particularmente difícil establecer garantías para sus argumentaciones y resultados. No obstante, son numerosos los investigadores que reconocen su importancia y potencial como metodología de investigación educativa (Cobb et al, 2003).

Los diversos autores consultados que han abordado la cuestión de la evaluación de estudios de diseño hacen referencia a cuatro criterios: fiabilidad, replicabilidad, capacidad de generalización e utilidad.

La fiabilidad según Cobb (2003) se refiere al grado en que las inferencias y afirmaciones del análisis retrospectivo son razonables y justificables, al reconocer que, a partir de conjunto de datos, se pueden hacer análisis retrospectivos diferentes. En estos estudios la fiabilidad se mide a partir del grado en que:

- El análisis ha sido sistemático e involucra la refutación de conjeturas
- Los criterios utilizados para las argumentaciones son explícitos permitiendo a otros investigadores monitorizar análisis.

La replicabilidad es entendida en relación a las variables del proceso de aprendizaje estudiado que pueden repetirse potencialmente en otros contextos o situaciones. Estas variables han de ser detalladamente delimitadas de aquellas que son dependientes del contexto, describiéndose el desarrollo de particulares formas de aprendizaje, pensamiento o actuación, los sucesivos cambios que especifican el desarrollo y los elementos del aprendizaje que son necesarios para sustentar dicho proceso.

El marco antes descrito, es especialmente relevante, debido a que elimina el abismo existente, entre la práctica educativa y los análisis teóricos, ya que provee informes situados sobre el aprendizaje de los estudiantes, relacionando directamente el proceso de aprendizaje con el modo en que ha sido promovido. Además, este tipo de estudios trabajan con los docentes en la construcción del conocimiento, reconocen los límites de la teoría,

capturan las especificidades de la práctica y las ventajas potenciales de adaptar la teoría a su contexto de forma iterativa y refinadora y, además, abordan los problemas cotidianos del aula, de los colegios y las comunidades que influyen en la enseñanza y el aprendizaje, adaptando la enseñanza a estas condiciones⁹.

Como describe Álvarez-Gayou (2003), el análisis de datos cualitativos es un proceso largo, ordenado y cuidadoso, de gran flexibilidad, en el que se pretende llegar a una mejor comprensión de un fenómeno, dar explicaciones alternativas y representación. El fenómeno viene determinado por los objetivos de investigación. En este caso, consiste en proponer un diseño didáctico para la enseñanza de los números complejos en tercer medio.

10. Instrumentos y procedimientos de recolección de datos.

La recogida de datos que acompaña a este tipo de diseño es exhaustiva para poder describir con precisión las interacciones ocurridas en el aula, la actuación y evolución de los alumnos, y las reflexiones y decisiones tomadas por el docente-investigador a lo largo del proceso de investigación.

Como es propio de la investigación cualitativa, en este trabajo se cuenta con una cantidad abundante de datos, procedentes de las producciones de los estudiantes, reflexiones pedagógicas del docente/investigador, talleres exploratorios, test de actitud hacia la matemática y focus group. A continuación se explicará estos últimos;

- Test de actitud hacia la matemática: Se utilizó la escala de Fennema y Sherman, la cual se compone de nueve sub-escalas que pueden emplearse individual o en

⁹ <http://www.designbasedresearch.org/>

conjunto. Las sub-escalas son las siguientes: confianza hacia el aprendizaje de las matemáticas, éxito en el aprendizaje de las matemáticas, actitudes del padre hacia el estudio de las matemáticas, actitudes de la madre hacia el estudio de la matemática, actitudes del maestro hacia el estudiante de matemáticas, las matemáticas como dominio masculino, ansiedad hacia el estudio de las matemáticas, utilidad de las matemáticas y motivación por el estudio de las matemáticas.

Las sub-escalas de actitudes de Fennema y Sherman (1976) son de tipo Likert y miden en general la postura del alumno hacia el aprendizaje de las matemáticas. En este estudio solo se utilizaron las sub-escalas de confianza hacia el aprendizaje de las matemáticas y éxito en el aprendizaje de las matemáticas.

- Focus Group: los grupos focales son una técnica de recolección de datos mediante una entrevista grupal semi-estructurada, la cual gira alrededor de una temática propuesta, en este caso, las estrategias didácticas empleadas por el docente para la enseñanza de los números complejos, idea central fue poder extraer toda la información posible de parte de los participantes, para ello se oriento una discusión, que fue guiada por un conjunto de preguntas, las cuales fueron diseñadas cuidadosamente para dar cumplimiento a los objetivos de investigación.

10.1 Participantes

Los sujetos participantes de este estudio, son alumnos de tercero medio del Liceo Bicentenario Araucanía de Villarrica. El curso está compuesto de 37 estudiantes, de los cuales 18 son mujeres y 19 son hombres, con una edad promedio de 16 años. De acuerdo a

los datos entregados por el departamento de orientación del establecimiento, sus áreas de interés son la literatura, el idioma extranjero inglés y el emprendimiento personal, este último muy valorado por las respectivas familias.

10.2 Implementación

Las clases de matemática estaban distribuidas en tres días a la semana, el día lunes con dos horas pedagógicas, el día martes con una hora pedagógica y por último el día miércoles con dos horas pedagógicas. En una semana normal de clases, la asistencia media del curso era de 34 estudiantes.

La intervención fue realizada en los meses de marzo y abril del año 2013, contando con un total de doce sesiones, las cuales comenzaron con la activación de conocimientos previos hasta terminar con una síntesis de la unidad. Cada una de las sesiones, contó con un diseño de aula que contemplaba; objetivo de aprendizaje, contenidos disciplinarios, actividades del estudiante, recursos y evaluación.

Las estrategias utilizadas en la implementación de la unidad didáctica de Números Complejos, son básicamente tres; trabajo individual, trabajo grupal y el uso de recursos TIC. para una mejor comprensión de cada uno de ellos a continuación se presenta una descripción de cada estrategia.

- Trabajo Individual: esta modalidad corresponde al caso en el cual, todos los alumnos, cada uno trabajando por separados, se enfrentan a un mismo problema, procurando estar atentos a la actividad mental generada por el esfuerzo personal que realizan al intentar resolverlo, de modo que puedan hacerse conscientes de su propia

dinámica cognitiva; es decir, de los procesos de pensamiento que desarrollan cuando llevan a cabo la actividad resolutoria. El abordaje individual de un problema es una experiencia idiosincrática, es decir, cada alumno se enfrenta al problema desde su propia perspectiva; es así como, la representación de la situación problemática que cada sujeto construye tiene carácter personal (Gonzalez, s/f).

- Trabajo Colaborativo: La fundamentación teórica del aprendizaje colaborativo se fundamenta en cuatro perspectivas teóricas, la de Vygotski, la de la ciencia cognitiva, la teoría social del aprendizaje y la de Piaget. Como sostiene Felder, y Brent (2007), Vygotsky y Piaget promovieron un tipo de enseñanza activa y comprometida, al plantear que las funciones psicológicas que caracterizan al ser humano, y por lo tanto, el desarrollo del pensamiento, surgen o son más estimuladas en un contexto de interacción y cooperación social. Los alumnos que trabajan en equipo requieren la movilización de recursos propios y externos, de ciertos conocimientos, habilidades y aptitudes, que permiten a un individuo adaptarse y alcanzar junto a otros en una situación y en un contexto determinado un cometido o meta colectiva.
- Uso de TIC: La relevancia que han adquirido en las últimas décadas las tecnologías de la información y las comunicaciones (TIC), particularmente el uso del computador e Internet, como motor de cambio y desarrollo es innegable, afectando las más diversas áreas de desarrollo social y económico. Entre ellas la educación se reconoce como el campo privilegiado de acción para abordar los

desafíos que ha traído esta revolución científica-tecnológica, para ponerse al día con la transformación productiva que dicha revolución implica, para resolver problemas sociales y para consolidar sus regímenes democráticos (Sunkel, 2006).

Ello le otorga un rol central al establecimiento educativo y la incorporación de las TIC en el centro de los procesos de enseñanza, demostrando que no es cualquier uso de la tecnología el que se asocia a mejores resultados académicos y que la promoción de usos significativos para la enseñanza puede potenciar el aprovechamiento de la tecnología para la formación de otras habilidades relevantes. Ese es un rol promotor que tiene que asumir un adulto que oriente y provea criterios para el uso de la tecnología y su potencial. El sistema educativo puede y debe llenar ese espacio, especialmente en los casos en que el hogar del estudiante no está preparado para hacerlo.

El currículum de Matemática tiene como propósito que los alumnos y alumnas adquieran los conocimientos básicos de la disciplina, desarrollando el pensamiento lógico, la capacidad de deducción, la precisión, las capacidades para formular y resolver problemas y habilidades necesarias para modelar situaciones o fenómenos. En este contexto, la matemática se vincula directamente con la necesidad de responder y resolver variados desafíos provenientes tanto del ámbito del quehacer humano como de la matemática misma; es por este motivo que se considera su construcción y desarrollo ligada a la historia y la cultura humana como de la matemática misma. Su aprendizaje enriquece la comprensión de la realidad, facilita la selección de estrategias para resolver problemas y contribuye al desarrollo de un pensamiento propio y autónomo. El modelamiento

matemático de la realidad, mediante el uso apropiado de conceptos, relaciones entre ellos y procedimientos matemáticos, ayuda al estudiante a comprender situaciones y fenómenos, y le permite formular explicaciones y hacer predicciones de ellos, aumentando su capacidad para intervenir en esa realidad (MINEDUC, 2009).

Por último vale mencionar que el rol principal del profesor en lo que se refiere al contenido de números complejos, tendrá dos partes, una será la de adoptar un rol activo, es decir el profesor expondrá y explicará al comienzo de cada clase algunos conceptos que sirvan a los alumnos para desarrollar y construir su conocimiento a través de resolución de problemas y/o ejercicios, que posteriormente serán entregados a través de una guía de aprendizaje o ejercicios, para que así los alumnos adopten la postura activa de la clase y por ende el profesor sea solo un mediador entre lo que plantean los alumnos y el nuevo contenido.

PARTE III: RESULTADOS Y CONCLUSIONES

11. Resultados

El análisis de los resultados, se ha realizado en dos dimensiones, el primero es un análisis cuantitativo, del desempeño de los estudiantes, en relación a la operatoria con números complejos, calculando promedio del curso y nivel de logro alcanzado en dicho contenido. (Ver Anexo D) Mediante la operatoria con números complejos, los estudiantes deben poner en juego, diversas competencias adquiridas en cursos anteriores, como la ley de los signos, la prioridad de las operaciones y utilizar la notación adecuada. En ocasiones, los significados de los que disponen les permiten desarrollar adecuadamente los distintos tipos de ejercicios y secuencias, en otros casos, les conducen a respuestas matemáticamente inadecuadas.

Posteriormente se ha realizado un análisis cualitativo, donde se han transcrito las entrevistas grupales. Tras la realización de las transcripciones y la organización de las respuestas de los estudiantes, se han establecido categorías, tales como; trabajo individual, trabajo, trabajo colaborativo y uso de TIC.

11.1 Resultados Cuantitativos

Los estudiantes mostraron resultados, interesantes de analizar, por ejemplo; en el contenido “Conjugado y opuesto de un número complejo” los alumnos mayoritariamente se ubicaron en el nivel avanzado, alcanzando un 81% del curso este nivel, mientras que el 14% se ubicó en el nivel intermedio y solo 5% en el nivel inicial. (Ver figura N°3).de

acuerdo a estos resultados los estudiantes muestran conocimientos básicos de los números complejos y capacidad de resolver problemas rutinarios y no rutinarios.

Tabla 1. Desempeño de los estudiantes según contenidos.

Contenido	Porcentaje alumnos nivel Avanzado	Porcentaje alumnos nivel Intermedio	Porcentaje alumnos nivel Inicial
Conjugado y opuesto de un número complejo	81	14	5
Operatoria con números complejos	26	54	20

Elaboración propia

En cuanto al contenido Operatoria con números complejos, los resultados obtenidos, de acuerdo a la rúbrica elaborada, indican que un 26% de los estudiantes se ubicó en un nivel avanzado de desempeño mostrando habilidad para operar con diversos requerimientos, tales como; sumar dos números complejos cualquiera, conjugados o alguna combinación de ellos. Además son capaces de escribir en forma correcta los resultados ya sea en forma binomial o como par ordenado. Mientras tanto el nivel intermedio fue alcanzado solo por un 54% de los estudiantes, mostrando principalmente errores de signos en la operatoria, revelando con ello que solo son capaces de escribir los resultados obtenidos como par ordenado o binomial. Por último un 20% de estudiantes mostraban un desempeño inicial, presentando principalmente falencias con los signos en la operatoria aritmetica para operar con números complejos.

Luego de describir los resultados obtenidos en la Tabla N°1, se observa que el desempeño de los alumnos en los contenidos de conjugado de un número complejo y

operatoria con numeros complejos, muestran un 95% y 80% de logro lo cual, les permite resolver problemas rutinarios y no rutinarios. Mientras que solo un 5% y 20% respectivamente han consolidado su aprendizaje respecto de estos contenidos.

Por último, en relación a los resultados cuantitativos de los alumnos en la evaluación final de la unidad didáctica implementada, la cual consistía en una prueba de selección múltiple, con cinco alternativas de las cuales solo una de ellas era la correcta.

Los estudiantes alcanzaron un nivel de logro del 71% (ver Tabla N°2) y una tasa de reprobación del 29% alcanzando un promedio de 4,7 a nivel de curso

Tabla 2. Distribución de los estudiantes, según notas y porcentaje de logro.

3°B	Número de alumnos	% de logro
Nota <4,0	11	29
$4,0 \leq \text{Nota} < 5,0$	15	41
$5,0 \leq \text{Nota} < 6,0$	6	16
Nota $\geq 6,0$	5	14
Total	37	100

Elaboración propia.

A la luz de la información obtenida con la prueba, el taller exploratorio, el focus groups y al cruzarla con las estrategias metodológicas efectivas y menos efectivas, se concluye que los estudiantes alcanzaron los objetivos planteados en el diseño de la unidad didáctica

11.2 Resultados Cualitativos

Entrevistas

En relación a las estrategias metodológicas aplicadas, se desarrollaron tres sesiones de entrevistas grupales de veinte cuatro estudiantes del curso, en el cual se desarrolló la unidad números complejos, se obtuvieron algunas declaraciones recurrentes en torno a; i) el rol activo del profesor, ii) el trabajo en pizarra, iii) las guías de trabajo, a continuación se ejemplifica cada una de las declaraciones:

I) El rol activo del profesor

(a) *“Me gusta que el profe explique al comienzo de cada clase”*

(b) *“yo entiendo cuando el profe nos entrega los tips”*

(c) *“cuando revisa las tareas el profe”*

Con estas declaraciones los estudiantes, dejan ver que las explicaciones y/o acotaciones del docente fueron buenas y útiles para el proceso de aprendizaje. También se puede mencionar que los estudiantes valoran las explicaciones y normas claras al interior del aula.

II) El trabajo en pizarra

(a) *“a mi gusta pasar a la pizarra, así le pregunto de una al profe”*

(b) *“en la pizarra aprendo las fórmulas o el procedimiento correcto”*

(c) *“en la pizarra corrijo, lo que hice en mi cuaderno”*

Los estudiantes mencionan que el trabajo en pizarra les permite aclarar sus dudas, consultar de manera directa y a la vez corregir lo realizado en su cuaderno.

III) Las guías de trabajo

(a) *“El libro mmm es muy difícil de entender”*

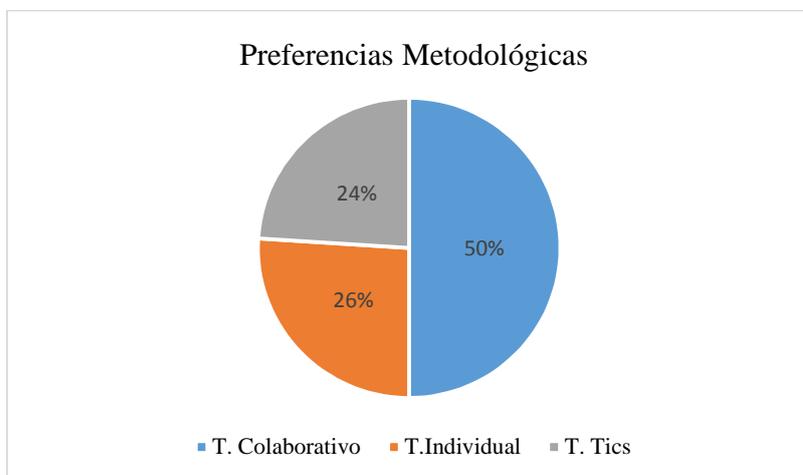
(b) *“Las guías del profe son mejores, traen más ejercicios”*

(c) *“las guías tiene ejercicios más fáciles”*

Los estudiantes dejan de manifiesto que el uso de las guías les facilita la forma de aprender, ya que presentan un lenguaje más sencillo y cercano a ellos, además de entregar una cantidad mayor de ejercicios para la comprensión de los distintos contenidos.

También se le consultó a los estudiantes sobre las estrategias metodológicas empleadas en el transcurso de la unidad, a lo cual ellos declaran preferir el trabajo colaborativo (ver Figura N°3). También aseguran que es la mejor forma de trabajo en aula es el poder trabajar con sus compañeros, ya que sienten que en este tipo de instancias, poseen más facilidades para aprender los números complejos, lo que se vio favorecido en un cien por ciento por la confianza que entrega el trabajar con compañeros de cursos, siempre que los grupos los constituyan ellos de acuerdo a afinidad personal o intereses comunes. Los estudiantes además sugieren, como debería ser un trabajo en grupo para que todos aprendan y se desarrollen; en la entrevista menciona que los grupos deben estar formados por cuatro integrantes, donde los integrantes se reúnan por intereses comunes y/o feeling, donde exista un líder que muestre competencias en matemática y además sea capaz de explicar a cada uno del integrantes, además el profesor debe mantener la resolución de ejercicios en pizarra y entregar indicaciones al líder del grupo.

Fig. 3. Preferencias Metodológicas.



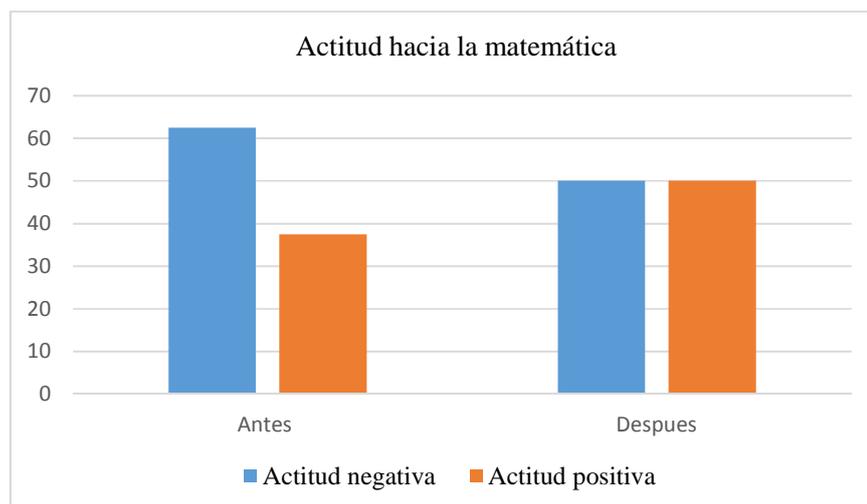
Elaboración propia

En relación al trabajo individual, aproximadamente uno de cada cuatro declara preferir trabajar individualmente, por ello en variadas situaciones se tuvo que modificar la planificación y seleccionar actividades y otros recursos que permitieran el trabajo individual de una mejor manera. Por otra parte el trabajo con TIC fue preferido en un 24%, sobre este resultado se consultó a estudiantes en la entrevista y ellos mencionan que estos recursos fueron muy pocos y no permitieron la comprensión adecuada de los contenidos, ya que el docente siempre tenía que estar explicando nuevamente en pizarra los contenidos o la actividad, por lo anterior, ellos proponen que se incorporen videos explicativos de cada uno de los tópicos más importantes de la unidad y la implementación de algún software específico para trabajar esta unidad.

En la última parte de la entrevista, se les consultó sobre su actitud hacia la matemática antes de la aplicación de la unidad. De los alumnos entrevistados un 62,5 % declaró tener una actitud negativa hacia la matemática, marca principalmente por tres

argumentos, en primer lugar la mala base que traen de la enseñanza básica, las matemáticas son aburridas y a mí mamá también le iba mal en matemática, en tercer lugar porque la matemática no sirve para lo que quiero estudiar. Desde el otro punto de vista, se tiene que un 37,5% de los entrevistados declara tener una actitud positiva hacia las matemática, argumentando principalmente que, la matemática es muy importante para lo que quieren estudiar en la universidad y además que siempre les ha ido muy bien en matemática.(Ver Figura N°4)

Fig. 4. Actitud hacia la Matemática.



Elaboración propia

Al realizar la misma pregunta a los estudiantes, pero después de haber aplicado la unidad los resultados obtenidos, cambian hacia una actitud positiva de las matemáticas, pues un cincuenta por ciento de ellos, menciona que; les gustó la unidad por que salía de la rutina de siempre operar con fracciones y números negativos, además permitía relacionar de mejor manera la matemática con la física. No obstante, un cincuenta por ciento de los

estudiantes menciona que la unidad seguía siendo poco útil para lo que ellos harán en la educación superior y era tan aburrida como siempre.

12. Conclusiones

La investigación que se recogió, ha consistido en un estudio, realizado en el campo de la Gestión Curricular y la Educación Matemática, dedicado a proponer una planificación efectiva para la enseñanza-aprendizaje de los números complejos en tercero medio, concebida como una unidad didáctica relevante en la implementación del ajuste curricular, impulsado por el Ministerio de Educación de Chile.

Con el propósito antes descrito, se han consultado estudios teóricos y empíricos del área de Didáctica de las Matemáticas y otras áreas de la educación como lo es la Gestión Curricular, la Psicología, la Filosofía y la Sociología, relacionados de algún modo con el tema. Las cuales han permitido (a) conocer el estado del arte de la enseñanza y el aprendizaje de los números complejos, (b) caracterizar el desempeño de los estudiantes, (c) identificar los errores frecuentes de los estudiantes y recoger resultados de investigaciones previas relativas a los números complejos.

En la parte empírica del trabajo, además de diseñar la intervención en el aula de acuerdo con los objetivos de investigación, se optó por una metodología de diseño, el cual es un paradigma emergente. Por ello se exploró su origen, fundamentación y principales

características, profundizando posteriormente, en el conocimiento de los experimentos de enseñanza y del diseño utilizado.

Se detalla a continuación, el grado que y modo en que se ha dado cumplimiento a los cuatro objetivos específicos, los cuales se refieren a:

- *Identificar las dificultades del docente en la enseñanza de los números complejos en tercero medio.*

El análisis de los datos obtenidos ha permitido identificar, que el docente muestra deficiencias, en la selección de estrategias didácticas para guiar el aprendizaje de los estudiantes en cuanto a números complejos. Ya que los estudiantes, manifestaron la necesidad de incorporar recursos tecnológicos y/o mayor cantidad de material concreto donde se puedan aplicar concretamente los contenidos estudiados. En síntesis, los profesores de matemáticas deben considerar una estrecha relación entre las matemáticas y sus aplicaciones a lo largo de todo el currículo. Es importante mostrar a los alumnos la necesidad de cada parte de las matemáticas antes de que les sea presentada. Los alumnos deberían ser capaces de ver cómo cada parte de las matemáticas satisfacen una cierta necesidad.

- *Identificar las potencialidades del docente en la enseñanza de los números complejos en tercero medio.*

La identificación de ciertos elementos claves, en el proceso de enseñanza – aprendizaje, mostró que el docente posee competencias explicativas muy avanzadas, lo que

permite que los estudiantes avancen, en la construcción de su aprendizaje de manera significativa. Lo que a su vez se traduce, en un clima de aprendizaje de confianza y respeto mutuo, donde cada uno de los estudiantes expone su punto de vista y/o reliza consultas cuando lo considera pertinente.

- *Identificar las estrategias didácticas que favorecen el proceso de enseñanza – aprendizaje de los números complejos en estudiantes de tercero medio.*

En cuanto a las estrategias didácticas que, favorecieron el aprendizaje de los estudiantes, destacan mayoritariamente el trabajo en grupo donde los alumnos (as) declaran sentirse más cómodos y libres para preguntar sobre algo que no entiendan. Además, las guías de ejercicios y/o aprendizaje diseñadas por el docente, fueron un recurso muy favorecedor de este tipo de trabajo, ya que estaban redactadas con un lenguaje, más cercano a su vocabulario y expresan instrucción de manera directa y clara, orientando el trabajo que iba a desarrollar en la clase.

- *Identificar la actitud hacia la matemática de los estudiantes de tercero medio tras la aplicación de la unidad de Números Complejos.*

El análisis de las respuestas entregadas por los estudiantes, ha dado luces que ellos poseen una visión Idealista Platónica¹⁰ de la matemática - que fue común entre muchos matemáticos profesionales hasta hace unos años- , considera que el alumno debe adquirir

¹⁰ Concepción Idealista Platónica, que fue común entre muchos matemáticos profesionales hasta hace unos años, considera que el alumno debe adquirir primero las estructuras fundamentales de las matemáticas de forma axiomática

primero las estructuras fundamentales de las matemáticas de forma axiomática, diferenciando la matemática pura de la matemática aplicada a las ciencias básicas, sociales, entre otras. Lo que hace que los estudiantes mencionen “siempre me ha ido mal en matemática”, “en mi carrera no ocuparé las matemáticas”, entre otras. No obstante, los estudiantes, declaran tener una actitud positiva hacia las matemáticas, y específicamente frente a los números complejos manifiestan un claro interés por comprender y operar con ellos en distintos contextos.

13. Recomendaciones

Como es sabido el proceso de enseñanza es siempre perfectible y sujeto a modificaciones, pues siempre se modifica en pro del aprendizaje de los estudiantes. En la presente unidad didáctica es necesario modificar en los siguientes puntos:

- Incorporar mayor cantidad de trabajo cooperativo, en actividades de exploración y profundización, ya que a través de este tipo de actividades los alumnos colectivizan, desarrollan habilidades sociales necesarias para el siglo XXI y se fomentan los objetivos fundamentales transversales.
- Se cambiaría la actividad en Excel, relativa a la operatoria con números complejos, por una donde los estudiantes apliquen, al mundo de la física o de la ingeniería en construcción de los números complejos.

- Cambiare la cantidad de ejercicios de ecuaciones en **C** e incorporare actividades que permitan el desarrollo de problemas geométricos, relativos a la traslación de figuras planas.

14. Limitaciones de la Investigación

En este apartado se indica algunos de los elementos que pueden considerarse limitaciones de este trabajo de investigación;

En primer lugar, los resultados se refieren al grupo de alumnos con los que se trabajó en el aula. La elección de dicho grupo ha sido accidental, causada, por la disponibilidad y facilidades dadas por el director y Jefe de la Unidad Técnico Pedagógica del liceo. Si bien, dicho grupo no puede ni debe considerarse representativo de todos los alumnos de Educación Media, si se puede considerar como un grupo promedio de alumnos.

En segundo lugar, se tiene el hecho de que sea un solo investigador (docente/investigador) el que haya realziado la mayor parte del proceso incluido la recogida de datos ha condicionado que se haya dado mayor presencia a la parte de revisión bibliografica y aplicación del diseño, por sobre la parte de investigación . lo cual ha dificultado el contraste de las visiones del observdor, no obstante la revisión a posteriori de las reflexiones de aula ha permitido abordarlo con cierta garantía. Esta doble función, puede dar lugar a cierta tensión entre el papel de docente y el papel de investigador, que la persona ha de poner simultaneamente en juego, este hecho ocasiona que la experiencia docente previa del investigador/docente sea una influencia en la realización de las intervenciones en la sala de clases.

Por último, el carácter exploratorio de este tipo de investigaciones provoca que, a priori, puedan no conocerse con detalle todas las variables de la intervención en el aula, de importancia en relación al fenómeno de estudio, en este caso la enseñanza –aprendizaje de los números complejos en educación secundaria. Por ello, se sugiere la grabación de cada una de las intervenciones, lo que permitiera explorar a posteriori, todo lo ocurrido en la sala de clases e identificar nuevos elementos de interés.

15. Aportes de la investigación

Este trabajo viene a aportar información de interés, para los investigadores, directivos y especialmente a los docentes de educación media en matemática. En relación a la unidad de números complejos y específicamente a las estrategias didácticas más efectivas para construir aprendizajes de calidad así como las potencialidades del docente a cargo del curso y la actitud de los estudiantes para con la matemática.

Por otra parte, habiéndose revisado el estado del arte, la presente investigación supone una contribución original al conocimiento sobre el proceso de enseñanza - aprendizaje de los números complejos, en estudiantes de tercero medio. Lo que entrega información a los docentes de matemáticas y directivos de los centros educativos para la toma de decisiones sobre el trabajo a desarrollar en el aula y apoyo que se debe brindar desde la Unidad Técnica Pedagógica a los profesores.

Estos estudios pueden ayudar a ver las actividades y/o estrategias matemáticas, desde su planeación ejecución y posterior análisis, lo que permite dirigir la actividad matemática hacia nuevas formas de atención, orientándolas al desarrollo de la comprensión y valoración por parte de los alumnos. Lo que conduce habitualmente a conocer una

riqueza de posibilidades mayores de las que podía esperarse a prior sobre los modos de concebir, o interpretar una situación matemática. En síntesis, ayudan al profesorado a cambiar significativamente su práctica educativa y sus creencias, teniendo efectos positivos en el aprendizaje de sus alumnos.

16. Referencias

- Álvarez-Gayou, J. (2005). Reseña de Cómo hacer investigación cualitativa. Fundamentos y metodologías. *Innovación Educativa*, 5(27) Recuperado de <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=179421423011>.
- Bellei, C. y F. Fiabane (editores) (2003). 12 Años de educación obligatoria. LOM – PIIE – UNICEF, Santiago.
- Bernstein, B. (1998). *Pedagogía Control Simbólico e Identidad*. Madrid. Morata. Recuperado de <http://www.ibe.unesco.org/publications/ThinkersPdf/bernsteins.pdf>
- Bolívar, A. (Ed.). (1999). *Cómo mejorar los centros educativos*. Madrid: Editorial Síntesis, S.A.
- Bolívar, A. (Ed.). (2011). *Aprender a Liderar Lideres: competentes para un liderazgo directivo que promueva el liderazgo docente*. *Educación*. Recuperado de http://ddd.uab.cat/pub/educar/0211819Xv47n2/educar_a2011v47n2p253.pdf
- Booth, D. y Elliott-Johns, S. (2009). *Boys' Literacy Attainment: Research and Related Practice*. Trabajo presentado en “2009 Ontario Education Research Symposium”, Toronto, Canadá. Recuperado de http://www.edu.gov.on.ca/eng/research/boys_literacy.pdf.
- Castro, E. y Castro, E. (1997). Representación y modelización. En L. Rico (coord), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp.95-124). Barcelona.
- Cobb, P. et al. (2003). Design experiment in Educational Research. *Educational Researcher*, 32 (1), 9-13.
- Cobb, P y Gravemeijer, K. (En prensa). Experimenting to support and understand learning processes. En A. E. Kelly, D. Lesh y Jbaek (Eds), *Handbook of design research methods in education*. Mahwah, NJ: Lawrence Earlbaum Associates.

- Cox, C. (2003). Las políticas Educativas de Chile en las últimas dos décadas del Siglo XX, en C.Cox(Editor), *Políticas educativas en el cambio de siglo. La reforma del sistema escolar de Chile*, Santiago: Editorial Universitaria.
- D'Amore B. (2008). Epistemología, didáctica de la matemática y prácticas de enseñanza. Enseñanza de la matemática. Revista de la ASOVEMAT. Vol.17,nº1,87-106.Recuperado de <http://www.dm.unibo.it/rsddm/it/articoli/damore/655%20Epistemologia%20didactica%20y%20practicass.pdf>
- English, L. y Sriraman, B. (2010).Problem solving for the 21st century. En B. Sriraman y L. English (Eds), *Theories of Mathematics Education* (pp.263-289). Heidelberg: Springer – Verlag. Recuperado de http://link.springer.com/chapter/10.1007%2F978-3-642-00742-2_27
- Elliot, J. (1996). El cambio Educativo desde la investigación – acción. Madrid:Morata.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: Reidel. 1. [Traducción de Luis Puig], publicada en *Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas. Textos seleccionados*. México: CINVESTAV, 2001. Recuperado de <http://www.uv.es/puigl/cap2metodo.pdf>
- Freudenthal, H. (1994). *Fenomenológica didáctica de las estructuras matemáticas (Textos seleccionados)*. Traducción, notas e introducción de L. Puig. Mexico D.F.
- Font, V. (2002). Una Organización de los Programas de Investigación en Didáctica de las Matemáticas. Revista EMA,7 (2), 127-170. Recuperado de http://webs.ono.com/vicencfont/index_archivos/Page534.htm
- Font, V., Planas, N y Godino, J. (2010). Modelo para análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje*, 33(1), 89-105. Recuperado de http://webs.ono.com/vicencfont/index_archivos/Page534.htm
- Genovard, C. & Gotzens, C. (1990). *Psicología de la instrucción*. Madrid: Santillana.

- Godino, J. y Font, V. (2003). Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.
- Godino, J. (2010). Perspectiva de la Didáctica de las Matemática como Disciplina Tecnocientífica. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada. Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino/fundamentos_teoricos/perspectiva_ddm.pdf
- Godino, J. (2010b). Marcos Teóricos sobre el Conocimiento y el Aprendizaje Matemático. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada. Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino/fundamentos_teoricos/marcos_teoricos_ddm.pdf
- Godino, J. (2004). Didáctica de las matemáticas para maestros. Departamento de Didáctica de las matemáticas. Universidad de Granada. ISBN:84-933517-1-7. Recuperado de, <http://www.ugr.es/local/jgodinno/>
- Higginson, W. (1980). On the foundations of mathematics education. For the learnig of matematics, Vol.1, n°2 pp.3-7
- Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2003). Metodología de la Investigación (3 Edición). Mexico: McGraw-Hill
- Kelly, A. E. (2003). Research as design. Educational Researcher. Recuperado de <http://edr.sagepub.com/content/41/1/16.abstract>
- Lester, F. K. (2010). On the theoretical, conceptual and philosophical foundations for research in mathematics education. Recuperado de http://link.springer.com/chapter/10.1007%2F978-3-642-00742-2_8#
- Ley sobre el sistema nacional de aseguramiento de la calidad de la educación, parvularia, básica y media y su fiscalización. Biblioteca del Congreso Nacional (2011). Recuperado de <http://www.leychile.cl/Navegar?idNorma=1028635>

- MINEDUC. (2005). CALIDAD EN TODAS LAS ESCUELAS Y LICEOS: Sistema de Aseguramiento de la Calidad de la Gestión Escolar (SACGE). Santiago: Publicación de la Unidad de Gestión y Mejoramiento Educativo.
- MINEDUC. (2005b). MARCO PARA LA BUENA DIRECCIÓN. Santiago de Chile.
- Molina, M. (2006). Desarrollo del Pensamiento Relacional y Comprensión del Signo Igual por alumnos de Tercero de Educación Primaria. Universidad de Granada. Recuperado de <http://0-hera.ugr.es.adrastea.ugr.es/tesisugr/16546167.pdf>
- Mosterín, J. (1987). Conceptos y teorías en la ciencia. Madrid: Alianza Universitaria
- National Council of Teacher of Mathematics (NCTM) (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, VA:Autor.
- Polya, G. (1945). ¿Cómo plantear y resolver problemas?México: trillas, 1965.
- Radford, L. (2006). Introducción Semiótica y Educación Matemática. Revista Latinoamericana de Matemática Educativa. Número especial, 7-21. Recuperado de <http://www.clame.org.mx/relime/200601d.pdf>
- Rico, L. (1998). Los organizadores del Currículo de Matemática. En L.Rico (Ed), La educación Matemática en la Enseñanza Secundaria (pp-39-59). Barcelona:Horsori.
- Romberg, T. Carpenter, T. (1986). La investigación sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas: dos disciplinas de la investigación científica. En M. Wittrock (ed). Manual de investigación sobre la enseñanza. (pp-850 - 873). Nueva york: Macmillan publishing company. Recuperado de <http://www.project2061.org/publications/bsl/online/index.php?reference=308&backref=12a>
- Sacristán, J., Pérez, A. (2005). Comprender y Transformar la Enseñanza.(11 Edición). Madrid:Morata, S,L.
- Sierpinska, A. & Lerman, S. (1996). Epistemologías de la matemática y de la educación matemática. En: A.j. Bishop et al. (eds), International Handbook of Mathematics

- Education, 827-876. [Traducción de Juan D. Godino]. Recuperado de http://servidor-opsu.tach.ula.ve/profeso/sanc_m/Didactica/Unidad%20II/Sierpinska_Lerman_Epistemologias.pdf
- Shavelson, R.J., Phillips, D.C., Towne, L. y Feuer, M. J. (2003). On the science of education design studies. *Educational Researcher*, 32(1), 25-28. Recuperado de http://www.stanford.edu/dept/SUSE/SEAL/Reports_Papers/On%20Scientific%20Research%20in%20Education_Questions%20.doc
- Skovsmose, O. (1999). *Hacia una filosofía de la educación matemática crítica*. Bogotá: Una empresa docente y Universidad de los Andes. [Traducción de Paola Valero]. Recuperado de <http://funes.uniandes.edu.co/673/1/Skovsmose1999Hacia.pdf>
- UNESCO, (2004). *La Educación Chilena en el cambio de siglo: Políticas, Resultados y Desafíos*. Santiago: Oficina Internacional de Educación. Recuperado de http://www.ibe.unesco.org/International/ICE47/English/Natreps/reports/chile_part_1.pdf
- UNESCO, (2011). *Datos Mundiales de Educación*. 7ª edición. Recuperado de http://www.ibe.unesco.org/fileadmin/user_upload/Publications/WDE/2010/pdf-versions/Chile.pdf
- Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol 10, N.2,3, pp.133-170. Recuperado de <http://www.scielo.org.ar/scieloOrg/php/reflinks.php?refpid=S1850-6666201100010001100018&lng=es&pid=S1850-66662011000100011>
- Vygotsky, L. S. (1978). *Mente en la sociedad; El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

17. Anexos

Anexo A: Planificación de la Unidad Didáctica Números Complejos.							
Formato de planificación semanal clase a clase							
Nombre de la unidad de Aprendizaje		Números Complejos ... el Gran Conjunto.					
Asignatura		Matemática		Nivel		NM-3	
Fecha de inicio		05/03/2013		Fecha de finalización		12/04/2013	
Objetivos de Aprendizaje		<ul style="list-style-type: none"> Comprender que los números complejos constituyen un conjunto numérico en el que es posible resolver problemas que no tienen solución en los números reales, y reconocer su relación con los números naturales, enteros, racionales y reales. Formular conjeturas, verificar para casos particulares y demostrar proposiciones utilizando conceptos, propiedades o relaciones de los diversos temas tratados en el nivel, y utilizar heurísticas para resolver problemas combinando, modificando o generalizando estrategias conocidas, fomentando la actitud reflexiva y crítica en la resolución de problemas. Valorar la perseverancia, el rigor, el cumplimiento, la flexibilidad y la originalidad. 					
N° semana	N° clase	N° Horas	Objetivo de Aprendizaje ¹¹	Contenidos Disciplinarios	Actividades del estudiante (Estrategia metodológica)	Recursos	Evaluación
1	1	2	Valorar el desarrollo histórico de la matemática	Contenidos de nm-1 y nm-2	Presentación de los alumnos y profesor . Presentación de la asignatura y programación anual. Explicación sobre la metodología de trabajo. Activación de conocimientos previos	Útiles escolares de uso diario.	Formativa: preguntas dirigidas a los estudiantes
1	2	3	Valorar el desarrollo	Reducción de términos	Desarrollo de guía N° 0: “refrescando la memoria”	Útiles escolares de	Revisión de ejercicios en

¹¹Para el caso de Enseñanza media se solicita extraer los Objetivos de Aprendizaje desde los Aprendizajes Esperados de las Bases Curriculares.

			histórico de la matemática	semejantes. Productos notables. Calculo de área y perímetro. Propiedades de las potencias. Teorema Pitágoras. Ubicar puntos en el plano cartesiano.		uso diario. Guía N°0	pizarra.
2	3	2	Identificar las situaciones que muestran la necesidad de ampliar los números reales a los números complejos	Necesidad de ampliación de los números reales a los números Complejos	Resolución de Ecuaciones. Clasificación de las soluciones de una ecuación.	Útiles escolares de uso diario. Guía N° 1	Plantean situaciones concretas donde es necesario utilizar números imaginarios.
2	4	3	Identificar la unidad imaginaria, como la solución de la ecuación $x^2 + 1 = 0$ y su	Números imaginarios. Adición y sustracción de números imaginarios. Potencias de i	Calculo de raíces cuadradas de números negativos. Análisis de las potencias de i Calculo de expresiones	Útiles escolares de uso diario. Guía N° 1	Resuelven ecuaciones del tipo $ax^2 + c = 0$ Donde a y c son del mismo signo.

			<p>utilización para expresar raíces cuadradas de números reales negativos.</p> <p>Identifican un número imaginario como aquel de la forma bi, con $b \in \mathcal{R}$.</p>		que involucran números imaginarios.		Identifica números imaginarios.
3	5	2	<p>Identificar la unidad imaginaria, como la solución de la ecuación $x^2 + 1 = 0$ y su utilización para expresar raíces cuadradas de números reales negativos.</p> <p>Identifican un número imaginario como aquel de la forma bi, con $b \in \mathcal{R}$.</p>	<p>Números imaginarios. Adición y sustracción de números imaginarios. Potencias de i</p>	Desarrollan taller formativo de números imaginarios, de manera individual.	Taller de números imaginarios.	Evaluación formativa, se reporta el nivel de logro alcanzado por cada estudiante.

3	6	3	Definir un número complejo como aquel de la forma $a + bi$ donde $a, b \in \mathcal{R}$. Representar un número complejo en forma canónica, como par ordenado y de manera grafica.	Números Complejos Representación de un número complejo	Ubicar números complejos en el “Plano Complejo” Verificación de propiedades: Conmutativa, Asociativa, elemento neutro, entre otras. Escriben números complejos en distintas notaciones.	Útiles escolares de uso diario. Guía N°2	Revisión de ejercicios en pizarra
4	7	2	Operar en \mathbb{C} (+; -; ::) y potenciación de números Complejos. Resolver ejercicios que involucren operatoria de números complejos	Números Complejos Representación de un número complejo Operatoria con números complejos.	Ubicar números complejos en el “Plano Complejo” Verificación de propiedades: Conmutativa, Asociativa, elemento neutro, entre otras. Escriben números complejos en distintas notaciones.	Útiles escolares de uso diario. Guía N°2	Revisión de ejercicios en pizarra y revisión individual de la guía N°2
4	8	3	Calcular el modulo de un número complejo.	Módulo de un número complejo Representación	Desarrollo dual de la primera parte de la Guía N°3	Útiles escolares de uso diario.	Responden preguntas directas. Define el

			Resolver ejercicios que involucren módulos de números complejos. Definir un complejo en base a su base módulo y ángulo que forma este con el eje real.	n trigonométrica de un número	Socialización de los resultado al grupo curso.	Guía N°3	modulo de un número complejo. Calcula el modulo de distintos números complejos.
5	9	2	Calcular potencias y raíces de un número complejo en distintas notaciones. Calcular productos y cocientes de complejos en forma polar	Potencias y raíces de un número complejo Forma polar y operaciones con números complejos Resolución de desafíos y problemas de planteo	<ul style="list-style-type: none"> - http://www.youtube.com/watch?v=M5_C8OoH3Zg - http://docentes.educacion.navarra.es/~msadaa11/geogebra/index.htm 	Útiles escolares de uso diario. Guía N°3 Conexión a internet.	Resuelven productos y cocientes de números complejos en forma polar.
5	10	3	Sintetizar los contenidos trabajados en la unidad	Contenidos trabajados en la unidad	Atención de preguntas y/o consultas por parte del docente. Construcción de un mapa	Útiles escolares de uso diario. Conexión a	Mapa conceptual

					conceptual http://docentes.educacion.navarra.es/~msadaall/geogebra/index.htm	internet	
6	11	2	Operar con números complejos en sus distintas representaciones . Resolver problemas geométricos utilizando números complejos.	Contenidos trabajados en la unidad	Prueba de la unidad	Útiles escolares de uso diario. Instrumento de evaluación	Resuelven ejercicios que involucran operaciones con números complejos. Resuelven ejercicios de cálculo de raíces y potencias de números complejos. Resuelven problemas que involucran propiedades y operatoria con números complejos.
6	12	3	Identificar fortalezas y debilidades académicas	Contenidos tratados en la unidad	retroalimentación	Útiles escolares de uso diario. Instrumento	Asume sus fortalezas e identifica sus debilidades y asume las

						de evaluación Pauta de corrección	recomendaciones para superarlas.
Plan de evaluación Unidad de Aprendizaje	La unidad de aprendizaje contempla diversas instancias de evaluación, estas son: guías de ejercicios, talleres, controles, trabajos grupales, pruebas de desarrollo, pruebas de selección múltiple, cada uno de estos instrumentos contemplara la resolución de problemas matemáticos y cotidianos.						

Anexo B: Prueba Selección múltiple Números Complejos



Liceo Bicentenario Araucanía
Pedro León Gallo 895
Fono fax 419053
Villarrica

Prueba Números Complejos



Alumno(a): _____

Firma: _____

PUNTAJE OBTENIDO	% LOGRO	NOTA

INSTRUCCIONES:

- Esta evaluación consta de 35 preguntas de selección múltiple, cada pregunta equivale a un punto.
- Marque con lápiz pasta azul o negro la alternativa que considere correcta, debe realizar el desarrollo de cada ejercicio con lápiz grafito.
- Que estrictamente prohibido el uso de calculadora o celular.
- Usted dispone de 80 minutos para responder la evaluación.

1. El valor de $\sqrt{-25} + 2\sqrt{-4} - \sqrt{-36}$

- A) $3i$
- B) $4i$
- C) $5i$
- D) $6i$
- E) $-6i$

2. El inverso aditivo de $(-2 - 5i)$ es:

- A) $-2 + 5i$
- B) $2 - 5i$
- C) $2 + 5i$
- D) $-5 - 2i$
- E) $5 + 2i$

3. Si $z_1 = 4 - 2i$ y $z_2 = -3 + 5i$ entonces $(z_1 + z_2)$ es igual a:

- A) $1 - 3i$
- B) $7 + 3i$
- C) $1 + 3i$
- D) $-1 + 3i$
- E) $-7 - 3i$

4. Si $z_1 = 2 - 5i$ y $z_2 = -5i$ entonces $(z_1 - z_2) =$

- A) $2 + 10i$
- B) $2 - 10i$
- C) $-2 + 10i$
- D) $-2 - 10i$
- E) 2

5. Si $z_1 = 3 - 2i$ y $z_2 = 4 + i$ entonces $z_1 z_2$ es:

- A) $14 + 5i$
- B) $14 - 5i$
- C) $-14 - 5i$
- D) $-14 + 5i$
- E) $5 - 14i$

6. Si $z_1 = 4 - 2i$ y $z_2 = -3 + 6i$ entonces $z_1 : z_2 =$

- A) $-\frac{8}{15} + \frac{2}{5}i$
- B) $\frac{8}{15} - \frac{2}{5}i$
- C) $\frac{8}{15} + \frac{2}{5}i$
- D) $-\frac{8}{15} - \frac{2}{5}i$
- E) $\frac{2}{5} + \frac{8}{15}i$

7. El inverso multiplicativo de $(1+2i)$ es:

A) $-\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i$

B) $\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i$

C) $-\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i$

D) $1-2i$

E) $-1-2i$

8. El valor de i^{112} es:

A) 0

B) 1

C) -1

D) i

E) $-i$

9. El valor de i^{-13} es:

A) 0

B) 1

C) -1

D) i

E) $-i$

10. El valor de $(i^{11} + i^{-5})^6$ es:

A) 64

B) -64

C) 32

D) -32

E) 16

11. El valor de $(-i^{17} + i^{126})^2$ es:

- A) 1
- B) -1
- C) i
- D) $-i$
- E) $2i$

12. Si $z = -1 + 3i$ entonces z^2 es:

- A) $8 - 6i$
- B) $-8 + 6i$
- C) $-8 - 6i$
- D) $6 + 8i$
- E) $-6 + 8i$

13. Si $z = -3 + 5i$, entonces $1 + z + z^2$ es:

- A) $18 - 25i$
- B) $-18 - 25i$
- C) $18 + 25i$
- D) $20 + 25i$
- E) $-20 + 25i$

14. El valor de $\frac{1}{i} + \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} + \frac{1}{i^4} + \frac{1}{i^5}$ es:

- A) 0
- B) 1
- C) -1
- D) i
- E) $-i$

15. Si $z_1 = 2 - i$, $z_2 = -2i$ y $z_3 = 4 + 2i$ entonces $z_1^{-1}(z_2 + z_3)$ es:

- A) $\frac{8}{5} + \frac{8}{5}i$
- B) $-\frac{8}{5} - \frac{8}{5}i$
- C) $\frac{4}{5} + \frac{8}{5}i$
- D) $-\frac{4}{5} - \frac{8}{5}i$
- E) $\frac{4}{5} - \frac{8}{5}i$

16. Si $z_1 = 4 - 2i$ y $z_2 = 5 + 6i$, entonces $\text{Re}(z_1 z_2)$ es:

- A) 9
- B) 12
- C) 14
- D) 20
- E) 32

17. Son soluciones de la ecuación, $x^2 - 2x + 5 = 0$ cual (es) de las siguientes opciones:

- I. $(1 + 2i)$
 - II. $(1 - 2i)$
 - III. 2
- A) Solo I y II
 - B) Solo I y III
 - C) Solo II y III
 - D) Solo III
 - E) Ninguna

18. La diferencia entre los complejos z_1 y z_2 es $(3 + 6i)$, si $z_2 = 2z_1$ entonces z_2 vale:

- A) $-3 - 6i$
- B) $-6 - 12i$
- C) $3 - 6i$
- D) $6 - 12i$
- E) $6 + 12i$

19. Si $z = 1 - i$ y $A z^2 = 1$, entonces A es:

- A) $-\frac{1}{2}i$
- B) $\frac{1}{2}$
- C) $1 + 2i$
- D) $1 - 2i$
- E) $-1 - i$

20. El valor de $(i^{-2} - i^{-1})^{-2}$ es:

- A) $2i$
- B) $-2i$
- C) $\left(\frac{-1}{2i}\right)$
- D) $\left(\frac{1}{2i}\right)$
- E) $1 - i$

21. En la igualdad $2x - 1 + i = 3 + i$, x vale:

- A) 0
- B) 1
- C) 2
- D) -1
- E) i

22. En la igualdad $(x - 2yi)(1 - i) = 7 + i$ los valores de x e y respectivamente son:

- A) 2 y 3
- B) 3 y 2
- C) 2 y -3
- D) 3 y -2
- E) -2 y -3

23. El número complejo, cuyo cuadrado es $(3 - 4i)$:

- A) $2 - i$
- B) $2 + i$
- C) $-2 - i$
- D) $-3 + i$
- E) $3 - i$

24. Para que $\frac{x+i}{i+1}$ sea un imaginario puro, x debe tomar el valor:

- A) 1
- B) -1
- C) 0
- D) 2
- E) -2

25. Para que $\frac{1-2i}{3x-i}$ sea un número real, x debe tomar el valor:

- A) 6
- B) -6
- C) $\frac{1}{6}$
- D) $-\frac{1}{6}$
- E) 1

26. Si $z=1-i$, entonces $2z^2 - z + 1$ es:

- A) 3
- B) -3
- C) $3i$
- D) $-3i$
- E) $3+3i$

27. En la ecuación, $z(1-i) + 3 = 1 - 2i + 2z$. El valor de la incognita z es:

- A) 2
- B) -2
- C) $2i$
- D) $-2i$
- E) $1-2i$

28. Si $z = 2 - 3i$, luego el $\text{Im}\left(\frac{1}{z^2}\right)$ es:

- A) 12
- B) $12 \cdot 13$
- C) $12 \cdot 13^2$
- D) $12 \cdot 13^{-2}$
- E) 13

29. El valor de $z \in \mathbb{C}$ que satisface la ecuación $z - \frac{1}{z} = 0$

- A) Cualquier número complejo
- B) 1 y -1
- C) $1 - 2i$
- D) i
- E) $-i$

30. Si $z = 1 - 3i$, entonces \bar{z} es:

- A) $-1 + 3i$
- B) $1 + 3i$
- C) $-1 - 3i$
- D) $1 + \frac{1}{3}i$
- E) $1 - \frac{1}{3}i$

31. El complejo $(-2 + 2i)$ en forma polar es:

- A) $2\sqrt{2}(\cos 45^\circ + i \text{sen} 45^\circ)$
- B) $2(\cos 45^\circ + i \text{sen} 45^\circ)$
- C) $2\sqrt{2}(\cos 135^\circ + i \text{sen} 135^\circ)$
- D) $2\sqrt{2}(\cos 225^\circ + i \text{sen} 225^\circ)$
- E) $2\sqrt{2}(\cos 315^\circ + i \text{sen} 315^\circ)$

32. El complejo $5(\cos 180^\circ + i \operatorname{sen} 180^\circ)$ en su forma cartesiana es:

- A) 5
- B) -5
- C) $5i$
- D) $-5i$
- E) $-5 + 5i$

33. Son raíces cuarta de -1:

- I. $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$
- II. $-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$
- III. $-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$
- IV. $\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$

- A) Solo I
- B) Solo I y IV
- C) Solo II y III
- D) Todas
- E) Ninguna

34. Dos números cuya suma es 5 y su producto es 25 son:

- A) $\frac{5+2\sqrt{3}}{2}i$ ----- $\frac{5-2\sqrt{3}}{2}i$
- B) $\frac{5+3\sqrt{3}}{2}i$ ----- $\frac{5-3\sqrt{3}}{2}i$
- C) $\frac{5+4\sqrt{3}}{2}i$ ----- $\frac{5-4\sqrt{3}}{2}i$
- D) $\frac{5+5\sqrt{3}}{2}i$ ----- $\frac{5-5\sqrt{3}}{2}i$
- E) $2+i\sqrt{3}$ ----- $(3-i\sqrt{3})$

35. Es solución de la ecuación $x^3 + 2 = -2i$ es:

- A) $i + 1$
- B) $i - 1$
- C) $2 + i$
- D) $-2 + i$
- E) $1 - i$

Anexo C: Carta Gantt “Proyecto Aplicado a la Gestión Escolar”

	Enero Febrero de 2013	Marzo de 2013	Abril de 2013	Mayo de 2013	Junio de 2013	Julio de 2013	Agosto de 2013	Septiembre de 2013	Octubre de 2013	Noviembre de 2013	Diciembre de 2013
Pasantía Didáctica de la Matemática, Universidad de Salamanca, España	X										
Implementación de la Unidad Didáctica: Números Complejos			X	X							
Diagnóstico de una necesidad específica para el diseño de una propuesta de gestión al interior del centro educativo.				X	X						
Antecedentes y justificación del problema de gestión						X	X				
Marco teórico y empírico de la propuesta de mejora.						X	X	X	X		

Resultados, conclusiones y proyecciones del trabajo realizado. Referencias Anexos.										X	X
---	--	--	--	--	--	--	--	--	--	---	---

Anexo D: Rúbrica para describir el desempeño de los estudiantes

Contenidos	Avanzado	Intermedio	Inicial
Conjugado y opuesto de un número complejo	Los alumnos y alumnas que alcanzan este nivel relacionan sus conocimientos de los números complejos y resuelven problemas rutinarios y no rutinarios ¹² que involucran el uso de números complejos. Además poseen conocimientos de geometría plana, y la utilizan para graficar números complejos, opuestos y conjugados respectivamente. Utilizan la notación \bar{z} , $\bar{\bar{z}}$ y $-z$.	Los alumnos y alumnas que alcanzan este nivel poseen conocimientos básicos de los números complejos, y resuelven problemas rutinarios ¹³ que requieren cálculos de conjugados. Además poseen conocimientos de geometría, pues realizan la representaciones de números complejos y sus respectivos conjugados.	Estos alumnos y alumnas aún no han consolidado los aprendizajes del Nivel Intermedio, ya que en ocasiones demuestran logros en algunos de los aprendizajes descritos en ese nivel, pero con una menor frecuencia y de manera poco consistente.
Operatoria	Los alumnos y alumnas que	Los alumnos y	Los alumnos y

¹² Los problemas no rutinarios son aquellos en los cuales la estrategia de resolución no es conocida por el estudiante, lo que implica que este debe idearla.

¹³ Los problemas rutinarios son aquellos en los cuales la estrategia de resolución es conocida por el estudiante, lo que le permite resolverlos en forma inmediata

<p>con números complejos</p>	<p>alcanzan este nivel, son capaces de sumar y/o restar números complejos, de distintos tipos como;</p> $z_1 + z_2$ $\overline{z_1 + z_2}$ $z_1 - z_2$ $\overline{z_1 - z_2}$ <p>Lo cual realizan de manera correcta sin errores de signos. Además son capaces de escribir los resultados en forma Binomial y de Par Ordenado.</p>	<p>alumnas que alcanzan este nivel, son capaces de sumar números complejos, de distinto tipo como:</p> $z_1 + z_2$ $\overline{z_1 + z_2}$ $z_1 - z_2$ $\overline{z_1 - z_2}$ <p>Lo cual realizan de manera correcta pero presentan problemas de signos en su desarrollo. Además escriben los resultados en forma binomial y en algunos casos como Par Ordenado.</p>	<p>alumnas que alcanzan este nivel, son capaces de sumar números complejos, de distinto tipo como:</p> $z_1 + z_2$ $\overline{z_1 + z_2}$ $z_1 - z_2$ <p>Lo cual realizan de manera correcta pero presentan serios problemas de signos en su desarrollo. Además no son capaces de escribir sus resultados en forma binomial ni como Par Ordenado.</p>
------------------------------	--	---	---